پاسخ میان ترم

۱- $(e^{۳}, ۲۰/۰۹) \rightarrow Q-Q_{۱} = -۰/۰۰۴۵ \rightarrow \frac{Q-Q_{۱}}{Q} = -۲/۲۲۲\times ۱۰^{-۴} \rightarrow \frac{Q-Q_{۱}}{Q}\times ۱۰۰ = -۰/۰۲\%$

$(\pi^{۲}, ۹/۸۶۹۶) \rightarrow Q-Q_{۱} = ۴/۴\times ۱۰^{-۶} \rightarrow \frac{Q-Q_{۱}}{Q} = ۴/۴۶\times ۱۰^{-۷} \rightarrow \frac{Q-Q_{۱}}{Q}\times ۱۰۰ = ۴/۴۶\times ۱۰^{-۵}\ \%$

۲- $c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\ ,\ a=\pi=۳/۱۴۲\ ,\ e_a \le ۰/۰۰۰۵\ ,\ b=e=۲/۷۱۸\ ,\ e_b\le ۰/۰۰۰۵$

$$c=\sqrt{۳/۱۴۲^{۲}+۲/۷۱۸^{۲}}=\sqrt{۹/۸۷۲+۷/۳۸۸}=۴/۱۵۵$$

$$e_c \le e_a \frac{\partial c}{\partial a}\Big|_{a=۳/۱۴۲,b=۲/۷۱۸} + e_b \frac{\partial c}{\partial b}\Big|_{a=۳/۱۴۲,b=۲/۷۱۸} = ۰/۰۰۰۵\frac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}\Big|_{a=۳/۱۴۲,b=۲/۷۱۸} + ۰/۰۰۰۵\frac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}\Big|_{a=۳/۱۴۲,b=۲/۷۱۸}$$

$$e_c \le ۰/۰۰۰۵(۰/۷۵۶)+۰/۰۰۰۵(۰/۶۵۴)=۰/۰۰۰۷ \rightarrow e'_c \le e_c + ۰/۰۰۰۵ = ۰/۰۰۱۲ < ۰/۰۰۵$$

پس دقت c دو رقم اعشار است.

۳- تعداد تغییر علامت $p(x)=۲x^{۳}+۹x^{۲}+۷x-۶$ برابر یک است. پس حتما یک ریشه مثبت دارد. تعداد تغییر علامت $p(x)=-۲x^{۳}+۹x^{۲}-۷x-۶$ برابر ۲ است. پس تعداد ریشه های معادله p(x)=0 برابر ۲ یا صفر است. چون ثابت معادله صفر نیست، ریشه صفر ندارد. بنابراین این معادله دارای یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی است یا یک ریشه مثبت و بدون ریشه منفی و دو ریشه مختلط و مزدوج یکدیگر است. $a_۰=۲\ ,\ a_n=-۶$ لذا ممکن است ، ریشه های کسری یکی از مقادیر ذیل است :

$$\frac{\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۶}{\pm۱,\pm۲}=\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۶,\pm\frac{۱}{۲},\pm\frac{۳}{۲}$$

ریشه های کسری برابر است با : ۳- و ۲- و ۰/۵

$$۱+\frac{۱}{|a_۰|}\max\{|a_۱|,|a_۲|,\dots,|a_n|\}=۱+\frac{۱}{۲}\max(۹,۷,۶)=۵/۵$$

$$\frac{|a_n|}{|a_n|+\max\{|a_۰|,|a_۱|,\dots,|a_{n-۱}|\}}=\frac{۶}{۶+\max(۲,۹,۷)}=۰/۴ \rightarrow ۰/۴\le|x|\le ۵/۵$$

۴- $f(x)=\cos(x)-x \rightarrow f'(x)=-\sin(x)-۱$

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{\cos(x_n)-x_n}{-\sin(x_n)-۱}\rightarrow x_{n+۱}=\frac{-x_n\sin(x_n)-\cos(x_n)}{-\sin(x_n)-۱}\ ,\ x_۰=۱\rightarrow x_۱=۰/۷۵۰\rightarrow$$

$$x_۲=۰/۷۳۹\rightarrow x_۳=۰/۷۳۹$$

۵- $y=\cos(\pi x)\ ,\ x=-۰/۵,۰,۰/۵\rightarrow y=۰,۱,۰$

$$L_۱(x)=\prod_{j=۰,\,j\ne۱}^{۲}\frac{(x-x_j)}{(x_۱-x_j)}=\frac{x-(-۰/۵)}{۰-(-۰/۵)}\frac{x-(۰/۵)}{۰-(۰/۵)}=-۴(x^{۲}-۰/۲۵)\rightarrow P(x)=\sum_{i=۰}^{۲}L_i(x)y_i=-۴(x^{۲}-۰/۲۵)$$

$$E(x)=\frac{\phi(x)}{(n+۱)!}f^{(n+۱)}(\varepsilon)=\frac{(x+۰/۵)(x-۰)(x-۰/۵)}{۳!}f''(x)\ \ :\ f''(x)=\pi^{۲}\sin(\pi x)$$

$$|E(x)|\le\frac{|x(x^{۲}-۰/۲۵)|}{۶}\pi^{۳}\ ,\ g(x)=x(x^{۲}-۰/۲۵)\rightarrow g'(x)=۳x^{۲}-۰/۲۵=۰\rightarrow$$

$$x=\frac{\pm۱}{۲\sqrt{۳}}=۰/۲۸۹\rightarrow g(x)=-۰/۰۴۸,+۰/۰۴۸$$

باید اعداد ۰/۵- و ۰/۵ را نیز چک کنیم.

$$g(-۰/۵)=g(۰/۵)=۰\rightarrow|g|_{\max}\Big|_{x\in[۰,۱]}=۰/۰۴۸\rightarrow|E|\le\frac{۰/۰۴۸}{۶}\pi^{۳}=۰/۲۴۸<۰/۵$$

لذا این درونیابی دقت یک رقم اعشار برای بازه $x\in[-0/5,0/5]$ ندارد.

۶- $$D^3=\frac{1}{h^3}\left(\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\dots\right)^3 \quad , \quad \nabla=hD-\frac{h^2}{2!}D^2+\frac{h^3}{3!}D^3-+\dots\to\nabla\propto h\Rightarrow\nabla^5\propto h^5$$

$$D^3\simeq\frac{1}{h^3}\left(\nabla^3+3\nabla^2\frac{\nabla^2}{2}\right)=\frac{1}{h^3}\left(\nabla^3+1/5\nabla^4\right)\to D^3y_i\simeq\frac{\nabla^3y_i+1/5\nabla^4y_i}{h^3}\ ,$$

$$\nabla^3y_i=y_i-3y_{i-1}+3y_{i-2}-y_{i-3}\ ,\ \nabla^4y_i=y_i-4y_{i-1}+6y_{i-2}-4y_{i-3}+y_{i-4}$$

$$y_i'''\simeq\frac{2/5y_i-9y_{i-1}+12y_{i-2}-7y_{i-3}+1/5y_{i-4}}{h^3}$$

۷- ابتدا بایدمعادبه درجه ۲ را به دو معادله درجه یک تبدیل نموده و سپس روش اویلر ساده را برای آن توسعه داد.

چون خطا در روش اویلر ساده متناسب با $h^2=0/01$ است، بطور میانگین برابر ۰/۰۳ خواهد بود. لذا دقت نتیجه یک رقم اعشار است. پس کافی است محاسبات را با دو رقم اعشار انجام می‌دهیم.

$$y''+e^{-x}y'+y=x\to\begin{cases}y=p=f_1(x,y,p)\\p'=x-e^{-x}p-y=f_2(x,y,p)\end{cases},\begin{cases}y(0)=1\\p(0)=-1\end{cases},\begin{cases}y_{i+1}=y_i+hf_1(x_i,y_i,p_i)\\p_{i+1}=p_i+hf_2(x_i,y_i,p_i)\end{cases}$$

$$i=0\to\begin{cases}y_1=y(0/1)=1+0/1(-1)=0/9\\p_1=p(0/1)=-1+0/1(0+1-1)=-1\end{cases}\ ,\ i=0\to\begin{cases}y_2=y(0/2)=0/9+0/1(-1)=0/8\\p_2=p(0/2)=-1+0/1(0/1+e^{-0/1}-0/9)=-0/99\end{cases}$$

$$i=2\to\begin{cases}y_3=y(0/3)=0/8+0/1(-0/99)=0/70\\p_3=p(0/3)=-0/99+0/1(0/2+e^{-0/2}(0/99)-0/8)=-0/97\end{cases}$$

۸- $y'=\ln(x+y)\,,\,x_0=0,\,y_0=1,\,h=0/1$ چون خطا متناسب با $h^5=10^{-5}$ است، بطور میانگین برابر ۰/۰۰۰۰۳ خواهد بود. لذا دقت نتیجه ۴ رقم اعشار است. پس کافی است محاسبات را با ۵ رقم اعشار انجام دهیم.

$$i=0\to k_1=hf(0,1)=0/1(\ln(0+1)=0\quad,\quad k_2=0/1f\left(0+\frac{1}{30},1+\frac{1}{3}(0)\right)=0/1\ln\left(\frac{1}{30}+1\right)=0/00328$$

$$k_3=0/1f\left(0+\frac{2}{30},1-\frac{1}{3}(0)+0/00328\right)=0/1\ln\left(\frac{2}{30}+1/00328\right)=0/00676$$

$$k_4=0/1f(0+0/1,1+-0/00328+0/00676)=0/1\ln(0/1+1/00348)=0/00985$$

$$y_1=y(0/1)=1+\frac{1}{8}k_1+\frac{3}{8}k_2+\frac{3}{8}k_3+\frac{1}{8}k_4=1/00500$$

۹- $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)dx\to f(x)=\cos(3x)\to f'=-3\sin(3x)\to f'=-9\cos(3x)\to f'''=27\sin(3x)$$

چون نهایتا از سیمسون اصلاح شده اتسفاده می کنیم، محاسبات میانی را به جای ۳ رقم اعشار کمی بیشتر به عنوان مثال با ۵ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$f^{(4)}=81\cos(3x)\to\max|f^{(4)}|\Big|_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}=81\ ,\ E=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\varepsilon)\to|E|\le\frac{\frac{\pi^5}{32}}{180n^4}(81)\le0/005\to$$

$$n\ge\sqrt[4]{\frac{\frac{\pi^5}{32}(81)}{180(0/005)}}=5/4\to n\ge6\Rightarrow\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{12}$$

$$A=\frac{\Delta x}{3}\left[f(0)+4f\left(\frac{\pi}{12}\right)+2f\left(\frac{\pi}{6}\right)+4f\left(\frac{\pi}{4}\right)+2f\left(\frac{\pi}{3}\right)+4f\left(\frac{5\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A=\frac{\pi}{۳۶}[۱+۴(۰/۷۰۷۱۱)+۲(۰)+۴(-۰/۷۰۷۱۱)+۲(-۱)+۴(-۰/۷۰۷۱۱)+(۰)]=-۰/۳۳۴۰۹$$

پس جواب با دقت دو رقم اعشار برابر است با :۰/۳۳-

$$CS_n(f)=S_n(f)-\frac{h^۴}{۱۸۰}[f'''(b)-f'''(a)]=-۰/۳۳۴۰۹-\frac{\frac{\pi^۴}{۱۶}}{۱۸۰}[۲۷\sin(\frac{۳\pi}{۲})-۲۷\sin(۰)]=-۰/۳۳۳۳۹$$

۱۰- $\int_۰^۲ xe^{-x}dx \to f(x)=xe^{-x} \to f'(x)=(۱-x)e^{-x} \to f''(x)=(-۲+x)e^{-x} \to f'''(x)=(۳-x)e^{-x}$

$$f'''(x)=۰ \to x=۳ \Rightarrow |f''(x)|\Big|_{\max, x\in[۰,۲]}=۲ \to |E|\le \frac{(۲-۰)^۳}{۲۴n^۲}(۲)<۰/۰۵ \to n\ge ۴ \Rightarrow n=۴ \to \Delta x=\frac{۲}{۴}=۰/۵$$

$$\int_۰^۲ xe^{-x}dx \;;\; ۰/۵\big[f(۰/۲۵)+f(۰/۷۵)+f(۱/۲۵)+f(۱/۷۵)\big]=۰/۵[۰/۱۹+۰/۳۵+۰/۳۶+۰/۳۰]=۰/۶۰$$