جواب تمرین سری دوم

۱- مسئله ۲۴ از فصل ۳ کتاب روشهای محاسبات عددی با روش اسپلاین مرتبه ۲

x	۰	۱	۲	۳
y	۰	۰/۵	۲	۱/۵

$$\begin{cases} a_۱+b_۱+c_۱=۰/۵ \\ a_۲+b_۲+c_۲=۰/۵ \\ ۴a_۲+۲b_۲+c_۲=۲ \\ ۴a_۳+۲b_۳+c_۳=۲ \end{cases},\ \begin{cases} c_۱=۰ \\ ۹a_۳+۳b_۳+c_۳=۱/۵ \end{cases},\ \begin{cases} ۲a_۱+b_۱=۲a_۲+b_۲ \\ ۴a_۲+b_۲=۴a_۳+b_۳ \end{cases} \quad ,\ a_۱=۰\to b_۱=۰/۵$$

$$\begin{cases} ۴a_۲+۲b_۲+c_۲=۲ \\ ۰/۵=۲a_۲+b_۲ \end{cases}\to c_۲=۱,\begin{cases} a_۲+b_۲+c_۲=۰/۵ \\ ۰/۵=۲a_۲+b_۲ \end{cases}\to\begin{cases} a_۲+b_۲=-۰/۵ \\ ۲a_۲+b_۲=۰/۵ \end{cases}\to a_۲=۱, b_۲=-۱/۵\to ۴a_۳+b_۳=۲/۵$$

$$\begin{cases} ۴a_۳+۲b_۳+c_۳=۲ \\ ۹a_۳+۳b_۳+c_۳=۱/۵ \end{cases}\to ۵a_۳+b_۳=-۰/۵\to\begin{cases} ۵a_۳+b_۳=-۰/۵ \\ ۴a_۳+b_۳=۲/۵ \end{cases}\to a_۳=-۳, b_۳=۱۴/۵\to c_۳=-۱۵$$

$$\Rightarrow s(x)=\begin{cases} ۰/۵x & : ۰\le x\le ۱ \\ x^۲-۱/۵x+۱ & : ۱\le x\le ۲ \\ -۳x^۲+۱۴/۵x-۱۵ & : ۲\le x\le ۳ \end{cases}$$

-۲

$$\Delta=hD+\frac{h^۲}{۲!}D^۲+\frac{h^۳}{۳!}D^۳+\ldots\to\Delta\propto h$$

$$D^۳=\frac{۱}{h^۳}\left(\Delta-\frac{\Delta^۲}{۲}+\frac{\Delta^۳}{۳}-+\ldots\right)^۳=\frac{۱}{h^۳}\left[\Delta^۲+(-\frac{\Delta^۲}{۲})^۲+۲(\Delta)(-\frac{\Delta^۲}{۲})+۲(\Delta)(\frac{\Delta^۳}{۳})\right]\left(\Delta-\frac{\Delta^۲}{۲}+\frac{\Delta^۳}{۳}-+\ldots\right)$$

$$D^۳=\frac{۱}{h^۳}\left[\Delta^۲-\Delta^۳+\frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴\right]\left(\Delta-\frac{\Delta^۲}{۲}+\frac{\Delta^۳}{۳}-+\ldots\right)=\frac{۱}{h^۳}\left[\Delta^۳-\Delta^۴+\frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۵-\frac{\Delta^۴}{۲}+\frac{\Delta^۵}{۲}+\frac{\Delta^۵}{۳}\right]$$

$$D^۳=\frac{۱}{h^۳}\left[\Delta^۳-۱/۵\Delta^۴+۱/۷۵\Delta^۵\right]\ ,\ \Delta^۳=y_{i+۳}-۳y_{i+۲}+۳y_{i+۱}-y_i\ ,$$

$$\Delta^۴=y_{i+۴}-۴y_{i+۳}+۶y_{i+۲}-۴y_{i+۱}+y_i\ ,\ \Delta^۵=y_{i+۵}-۵y_{i+۴}+۱۰y_{i+۳}-۱۰y_{i+۲}+۵y_{i+۱}-y_i$$

$$y'''=\frac{۱/۷۵y_{i+۵}-۱۰/۲۵y_{i+۴}+۲۴/۵y_{i+۳}-۲۹/۵y_{i+۲}+۱۷/۷۵y_{i+۱}-۴/۲۵y_i}{h^۳}$$

مسئله ۲۷ از فصل ۳ کتاب روشهای محاسبات عددی :

ساعت	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
دما	۱۶	۲۲	۲۶	۲۸	۲۴	۲۱	۱۸

$$y'''=\frac{۱/۷۵(۱۸)-۱۰/۲۵(۲۱)+۲۴/۵(۲۴)-۲۹/۵(۲۸)+۱۷/۷۵(۲۶)-۴/۲۵(۲۲)}{۲^۳}=-۶/۷۱۸۷۵$$

۳- مسئله ۱۷ از فصل ۴ کتاب روشهای محاسبات عددی با روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ کلاسیک

چون خطا تقریبا برابر $۳h^۵=۰/۰۰۰۰۳$ است، دقت نتیجه چهار رقم اعشار خواهد بود. پس محاسبات میانی با ۵ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$y'=e^{xy}\quad ,\ x\in[۰,۰/۳]\ ,\ h=۰/۱\ ,\ y(۰)=۱$$

$$i=۰\ :\ k_1=hf(x_۰,y_۰)=۰/۱f(۰,۱)=۰/۱$$

$$k_۲=hf(x_۰+۰/۵h,y_۰+۰/۵k_۱)=۰/۱f(۰+۰/۰۵,۱+۰/۰۵)=۰/۱۰۵۳۹$$

$$k_۳=hf(x_۰+۰/۵h,y_۰+۰/۵k_۲)=۰/۱f(۰+۰/۰۵,۱+۰/۰۵۲۷۰)=۰/۱۰۵۴۰$$

$$k_۴ = hf(x_۰ + h, y_۰ + k_۳) = ۰/۱f(۰+۰/۱, ۱+۰/۱۰۵۴۰) = ۰/۱۱۱۶۹$$

$$y_۱ = y(۰/۱) = y_۰ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۱۰۵۵۵$$

$$i = ۱:\ k_1 = hf(x_۱, y_۱) = ۰/۱f(۰/۱, ۱/۱۰۵۵۵) = ۰/۱۱۱۶۹$$

$$k_۲ = hf(x_۱ + ۰/۵h, y_۱ + ۰/۵k_۱) = ۰/۱f(۰/۱+۰/۰۵, ۱/۱۰۵۵۵+۰/۰۵۵۸۵) = ۰/۱۱۹۰۳$$

$$k_۳ = hf(x_۱ + ۰/۵h, y_۱ + ۰/۵k_۲) = ۰/۱f(۰/۱+۰/۰۵, ۱/۱۰۵۵۵+۰/۰۵۹۵۲) = ۰/۱۱۹۱۰$$

$$k_۴ = hf(x_۱ + h, y_۱ + k_۳) = ۰/۱f(۰/۱+۰/۱, ۱/۱۰۵۵۵+۰/۱۱۹۱۰) = ۰/۱۲۷۷۵$$

$$y_۲ = y(۰/۲) = y_۱ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۲۲۴۸۳$$

$$i = ۲:\ k_1 = hf(x_۲, y_۲) = ۰/۱f(۰/۲, ۱/۲۲۴۸۳) = ۰/۱۲۷۷۶$$

$$k_۲ = hf(x_۲ + ۰/۵h, y_۲ + ۰/۵k_۱) = ۰/۱f(۰/۲+۰/۰۵, ۱/۲۲۴۸۳+۰/۰۶۳۸۸) = ۰/۱۳۸۰۱$$

$$k_۳ = hf(x_۲ + ۰/۵h, y_۲ + ۰/۵k_۲) = ۰/۱f(۰/۲+۰/۰۵, ۱/۲۲۴۸۳+۰/۰۶۹۰۱) = ۰/۱۳۸۱۹$$

$$k_۴ = hf(x_۲ + h, y_۲ + k_۳) = ۰/۱f(۰/۲+۰/۱, ۱/۲۲۴۸۳+۰/۱۳۸۱۹) = ۰/۱۵۰۵۲$$

$$y_۳ = y(۰/۳) = y_۲ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۳۶۳۲۸$$

۴- مسئله ۱۵ از کتاب روشهای محاسبات عددی از فصل ۴ با روش اویلر ساده

$$y''' - xy'' + y = ۰ \quad , \ x \in [۰, ۰/۳] \ , \ h = ۰/۱ \ , y(۰) = y'(۰) = y''(۰) = ۱$$

چون خطا تقریبا برابر $۳h^۲ = ۰/۰۳$ است، دقت نتیجه یک رقم اعشار خواهد بود. پس محاسبات میانی با ۲ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$\begin{cases} y' = p = f_۱(x, y, p, q) \\ p' = q = f_۲(x, y, p, q) \\ q' = xq - y = f_۳(x, y, p, q) \end{cases} , \begin{cases} y(۰) = ۱ \\ p(۰) = ۱ \\ q(۰) = ۱ \end{cases} , \ x_۰ = ۰ \ , \begin{cases} y_{i+۱} = y_i + hf_۱(x_i, y_i, p_i, q_i) \\ p_{i+۱} = p_i + hf_۲(x_i, y_i, p_i, q_i) \\ q_{i+۱} = q_i + hf_۳(x_i, y_i, p_i, q_i) \end{cases}$$

$$i = ۰: \begin{cases} y_۱ = y(۰/۱) = y_۰ + hf_۱(x_۰, y_۰, p_۰, q_۰) = ۱+۰/۱p_۰ = ۱/۱ \\ p_۱ = p(۰/۱) = p_۰ + hf_۲(x_۰, y_۰, p_۰, q_۰) = ۱+۰/۱q_۰ = ۱/۱ \\ q_۱ = q(۰/۱) = q_۰ + hf_۳(x_۰, y_۰, p_۰, q_۰) = ۱+۰/۱(-۱) = ۰/۹ \end{cases}$$

$$i = ۱: \begin{cases} y_۲ = y(۰/۲) = y_۱ + hf_۱(x_۱, y_۱, p_۱, q_۱) = ۱/۱+۰/۱p_۱ = ۱/۲۱ \\ p_۲ = p(۰/۲) = p_۱ + hf_۲(x_۱, y_۱, p_۱, q_۱) = ۱/۱+۰/۱q_۱ = ۱/۱۹ \\ q_۲ = q(۰/۲) = q_۱ + hf_۳(x_۱, y_۱, p_۱, q_۱) = ۰/۹+۰/۱(۰/۰۹-۱/۱) = ۰/۸۰ \end{cases}$$

$$i = ۲:\ y_۳ = y(۰/۳) = y_۲ + hf_۱(x_۲, y_۲, p_۲, q_۲) = ۱/۲۱+۰/۱p_۲ = ۱/۳۳$$

با اجرای دستورالعمل ذیل :

```
[x,y] = ode45(@(x,y) exp(x*y), [0 0.3], 1);
```

پاسخ معادله سوال ۳ بدست می آید. در صورتی که دستور s1=size(y) اجرا شود اندازه y برابر یک بردار ستونی با ۴۱ ردیف خواهد شد که y(41,1)=1.363275019255 می شود که در مقایسه با جواب معادله ۳ نشان می دهد که جواب سوال ۳ دارای دقت ۵ اعشار است.

با تعریف تابع ذیل :

```
function dydx = vdp1(x,y)
dydx = [y(2); y(3) ;x*y(3)-y(1)];
```

و سپس اجرای دستورالعمل :

```
[x,y] = ode45(@vdp1, [0 0.3], [1;1;1]);
```

پاسخ معادله سوال ۴ بدست می آید. در صورتی که دستور s1=size(y) اجرا شود اندازه y برابر یک ماتریس با سه ستوان و ۴۱ ردیف خواهد شد که y(41,1)=1.340439750930675 می شود که در مقایسه با جواب معادله 4 نشان می دهد که جواب سوال 4 دارای دقت ۱ اعشار است.