جواب تمرین سری سوم

۱- مسئله ۱۱ از فصل ۵ کتاب روشهای محاسبات عددی

روش سیمسون مرکب :

$$Ei(۲)=\int_{۱}^{۲}\frac{e^{-t}}{t}dt\ ,\ f(t)=\frac{e^{-t}}{t}\rightarrow f'(t)=\frac{-te^{-t}-e^{-t}}{t^{۲}}=-\frac{t+۱}{t^{۲}}e^{-t}\rightarrow$$

$$f''(t)=-\frac{t^{۲}-۲t(t+۱)}{t^{۴}}e^{-t}+\frac{t+۱}{t^{۲}}e^{-t}=\frac{t^{۲}+۲t+۲}{t^{۳}}e^{-t}\rightarrow f'''(t)=-\frac{t^{۳}+۳t^{۲}+۶t+۶}{t^{۴}}e^{-t}\rightarrow$$

$$f^{(۴)}(t)=\frac{t^{۴}+۴t^{۳}+۱۲t^{۲}+۲۴t+۲۴}{t^{۵}}e^{-t}\rightarrow M_{۴}=\max|f^{(۴)}|_{x\in[۱,۲]}=۲۳/۹$$

$$|E|<۰/۰۰۵\rightarrow n>\sqrt[۴]{\frac{M_{۴}(b-a)^{۵}}{۱۸۰\Delta I}}=\sqrt{\frac{۲۳/۹(۲-۱)^{۵}}{۱۸۰(۰/۰۰۵)}}=۲/۲۷\rightarrow n\geq ۴\rightarrow \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱}{۴}$$

$$A=\frac{\Delta x}{۳}[f(x_{۰})+۴f(x_{۱})+۲f(x_{۲})+۴f(x_{۳})+f(x_{۴})]=\frac{۱}{۱۲}[f(۱)+۴f(۱/۲۵)+۲f(۱/۵)+۴f(۱/۷۵)+f(۲)]$$

$$A=\frac{۱}{۱۲}[۰/۳۶۸+۴(۰/۲۲۹)+۲(۰/۱۴۹)+۴(۰/۰۹۹)+۰/۰۶۸]=۰/۱۷۱$$

با دقت دو رقم اعشار نتیجه برابر است با : ۰/۱۷

روش سیمسون اصلاح شده :

$$CS_{n}(f)=S_{n}(f)-\frac{h^{۴}}{۱۸۰}[f'''(b)-f'''(a)]=۰/۱۷۱-\frac{۰/۲۵^{۴}}{۱۸۰}[f'''(۲)-f'''(۱)]$$

$$CS_{n}(f)=۰/۱۷۱-\frac{۰/۲۵^{۴}}{۱۸۰}[۰/۳۲۱-۵/۸۸۶]=۰/۱۷۰۹$$

برای اینکه نشان دهیم روش اصلاح شده از دقت بیشتری برخوردار است بایستی از ابتدا محاسبات میانی را با تعداد ارقام بیشتری مثلا ۵ رقم اعشار انجام دهیم. در این حالت نتیجه برای روش سیمسون برابر ۰/۱۷۰۵۹ و برای اصلاح شده ۰/۱۷۰۴۷ خواهد شد.

۲- مسئله ۱۱ از فصل ۵ کتاب روشهای محاسبات عددی با روش گوس لژاندر یک و دو و سه نقطه ای

$$Ei(۲)=\int_{۱}^{۲}\frac{e^{-t}}{t}dt\ ,\ t=k_{۱}x+k_{۲}\rightarrow\begin{cases}۱=-k_{۱}+k_{۲}\\ ۲=k_{۱}+k_{۲}\end{cases}\rightarrow k_{۱}=۰/۵\,,k_{۲}=۱/۵\rightarrow t=\frac{x+۳}{۲}$$

$$Ei(۲)=۰/۵\int_{-۱}^{۱}\frac{e^{-(۰/۵x+۱/۵)}}{۰/۵x+۱/۵}dx=\int_{-۱}^{۱}\frac{e^{-(۰/۵x+۱/۵)}}{x+۳}dx\rightarrow f(x)=\frac{e^{-(۰/۵x+۱/۵)}}{x+۳}$$

روش گوس-لزاندر یک نقطه ای :

$$Ei(۲)=۲f(۰)=۲\frac{e^{-(+۱/۵)}}{۳}=۰/۱۴۹\ ,\ \Delta Q=\frac{f^{(۲)}(\varepsilon)}{(۲)!}\frac{۲^{۳}(۱!)^{۴}}{(۳)!(۲)!}=\frac{۱}{۳}f^{(۲)}(\varepsilon)$$

$$f^{(۲)}(x)=e^{-(۰/۵x+۱/۵)}\frac{x^{۲}+۱۰x+۲۹}{۴(x+۳)^{۳}}\rightarrow \max f^{(۲)}(x)\Big|_{x\in[-۱,۱]}=۰/۲۳\Rightarrow \Delta Q_{max}=۰/۰۷۷$$

از کران خطای مطلق مشخص می شود که نتیجه از دقت یک رقم اعشار برخوردار نبوده و کافی بود محاسبات میانی با ۱ رقم اعشار باشد.

روش گوس-لزاندر دو نقطه ای :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(\frac{-1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{e^{-(0.5\frac{-1}{\sqrt{3}}+1.5)}}{\frac{-1}{\sqrt{3}}+3}+\frac{e^{-(0.5\frac{1}{\sqrt{3}}x+1.5)}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+3}=0.1229+0.0467=0.1696$$

$$\Delta Q=\frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{(4)!}\frac{2^5(2!)^4}{(5)!(4)!}=\frac{1}{135}f^{(4)}(\varepsilon)\ ,\ f^{(4)}(x)=e^{-(0.5x+1.5)}\frac{x^4+20x^3+174x^2+804x+1689}{16(x+3)^5}\rightarrow$$

$$\max f^{(4)}(x)\Big|_{x\in[-1,1]}=0.747\Rightarrow \Delta Q_{max}=0.0055$$

از کران خطای مطلق مشخص می شود که نتیجه از دقت یک رقم اعشار برخوردار بوده و کافی بود محاسبات میانی با ۲ رقم اعشار باشد

روش گوس-لزاندر سه نقطه ای :

$$P_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3]=0\rightarrow \frac{d^3}{dx^3}[x^6-3x^4+3x^2-1]=0\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}[6x^5-12x^3+6x]=0\rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[30x^4-36x^2+6]=0\rightarrow 120x^3-72x=0\rightarrow x=-\sqrt{0.6}\ ,\ x=0\ ,\ x=\sqrt{0.6}$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2]=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}[(x^4-2x^2+1)]=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}[(4x^3-4x)]=\frac{1}{8}(12x^2-4)$$

$$\omega_i=\frac{2(1-x_i^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2}\rightarrow \omega_1=\frac{2(1-0.6)}{3^2\frac{1}{64}[12(0.6)-4)]^2}=\frac{5}{9}=\omega_3\ ,\ \omega_2=\frac{2(1-0)}{3^2\frac{1}{64}[12(0)-4)]^2}=\frac{8}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9}f(-\sqrt{0.6})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(-\sqrt{0.6})=\frac{5}{9}\frac{e^{-(0.5(-\sqrt{0.6})+1.5)}}{-\sqrt{0.6}+3}+\frac{8}{9}\frac{e^{-(0+1.5)}}{0+3}+\frac{5}{9}\frac{e^{-(0.5(\sqrt{0.6})+1.5)}}{\sqrt{0.6}+3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 0.08205+0.06611+0.04013=0.18829$$

$$\Delta Q=\frac{f^{(6)}(\varepsilon)}{(6)!}\frac{2^7(3!)^4}{(7)!(6)!}=\frac{1}{15750}f^{(6)}(\varepsilon)\ ,$$

$$f^{(6)}(x)=e^{-(0.5x+1.5)}\frac{x^6+30x^5+435x^4+4020x^3+25335x^2+102798x+206325}{64(x+3)^7}\rightarrow$$

$$\max f^{(6)}(x)\Big|_{x\in[-1,1]}=5.6245\Rightarrow \Delta Q_{max}=3.57\times 10^{-4}$$

از کران خطای مطلق مشخص می شود که نتیجه از دقت سه رقم اعشار برخوردار بوده و کافی بود محاسبات میانی با ۴ رقم اعشار باشد .

-۳

$$\begin{cases}2x+3y+az=a\\3x+4y+7z=6\\x+3y+2z=a\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}2&3&a&a\\3&4&7&6\\1&3&2&a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1.5&0.5a&0.5a\\3&4&7&6\\1&3&2&a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1.5&0.5a&0.5a\\0&-0.5&7-1.5a&6-1.5a\\0&1.5&2-0.5a&0.5a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱/۵ & ۰/۵a & ۰/۵a \\ ۰ & ۱ & -۱۴+۳a & -۱۲+۳a \\ ۰ & ۱/۵ & ۲-۰/۵a & ۰/۵a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲۱-۴a & ۱۸-۴a \\ ۰ & ۱ & -۱۴+۳a & -۱۲+۳a \\ ۰ & ۰ & ۲۳-۵a & ۱۸-۴a \end{bmatrix} \xrightarrow{۲۳-۵a\neq ۰}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲۱-۴a & ۱۸-۴a \\ ۰ & ۱ & -۱۴+۳a & -۱۲+۳a \\ ۰ & ۰ & ۱ & \dfrac{۱۸-۴a}{۲۳-۵a} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱۸-۴a+\dfrac{۱۸-۴a}{۲۳-۵a}(۴a-۲۱) \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱۲+۳a+\dfrac{۱۸-۴a}{۲۳-۵a}(۱۴-۳a) \\ ۰ & ۰ & ۱ & \dfrac{۱۸-۴a}{۲۳-۵a} \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{cases} x = ۱۸-۴a+\dfrac{۱۸-۴a}{۲۳-۵a}(۴a-۲۱) \\ y = -۱۲+۳a+\dfrac{۱۸-۴a}{۲۳-۵a}(۱۴-۳a) \\ z = \dfrac{۱۸-۴a}{۲۳-۵a} \end{cases}$$

$$\text{if } ۲۳-۵a = ۰ \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲۱-۴a & ۱۸-۴a \\ ۰ & ۱ & -۱۴+۳a & -۱۲+۳a \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۸-۴a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲/۶ & -۰/۴ \\ ۰ & ۱ & -۰/۲ & ۱/۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۰/۴ \end{bmatrix} \to \text{no answer}$$

چون رتبه ماتریس A و Ab به ترتیب برابر ۲ و ۳ است و لذا معادلات سازگار نیستند.

-۴

$$\begin{cases} ۲x_۱+۳x_۲+۵x_۳ = ۵ \\ ۳x_۱+۴x_۲+۷x_۳ = ۶ \\ x_۱+۳x_۲+۲x_۳ = ۵ \end{cases} \to A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۷ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \\ ۵ \end{bmatrix},\ x^{(۰)} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

Step 0:

$$C = C^{-۱} = I,\ r^{(۰)} = b - Ax^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۸ \\ ۴ \end{bmatrix} \to w = C^{-۱}r^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۸ \\ ۴ \end{bmatrix},\quad v^{(۱)} = C^{-t}w = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۸ \\ ۴ \end{bmatrix},\ \alpha = \langle w, w\rangle = ۱۱۶$$

Step 1:

$$u = Av^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۷ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۶ \\ ۸ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۶ \\ ۷۸ \\ ۳۸ \end{bmatrix},\ t_۱ = \frac{\alpha}{\langle v^{(k)}, u\rangle} = \frac{۱۱۶}{۱۱۱۲} = \frac{۲۹}{۲۷۸} = ۰/۱۰۴$$

$$x^{(۱)} = x^{(۰)} + t_۱v^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + ۰/۱۰۴\begin{bmatrix} ۶ \\ ۸ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/۳۷۶ \\ ۱/۸۳۲ \\ ۰/۴۱۶ \end{bmatrix},\ r^{(۱)} = r^{(۰)} - t_۱u = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۸ \\ ۴ \end{bmatrix} - ۰/۱۰۴\begin{bmatrix} ۵۶ \\ ۷۸ \\ ۳۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۱۷۶ \\ -۰/۱۱۲ \\ ۰/۰۴۸ \end{bmatrix}$$

$$w = C^{-۱}r^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۰/۱۷۶ \\ -۰/۱۱۲ \\ ۰/۰۴۸ \end{bmatrix},\ \beta = \langle w, w\rangle = ۰/۰۴۶,\ s_۱ = \frac{\beta}{\alpha} = ۰,\ v^{(۲)} = C^{-t}w + s_۱v^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۰/۱۷۶ \\ -۰/۱۱۲ \\ ۰/۰۴۸ \end{bmatrix}$$

$$\text{Step 2}: \ \alpha = ۰/۰۴۶$$

$$u = Av^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۷ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۱۷۶ \\ -۰/۱۱۲ \\ ۰/۰۴۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۲۵۶ \\ ۰/۴۱۶ \\ -۰/۰۶۴ \end{bmatrix}, \ t_۱ = \frac{\alpha}{\langle v^{(k)}, u \rangle} = \frac{۰/۰۴۶}{-۰/۰۰۵} = -۹/۲۰۰$$

$$x^{(۲)} = x^{(۱)} + t_۱ v^{(۲)} = \begin{bmatrix} -۱/۳۷۶ \\ ۱/۸۳۲ \\ ۰/۴۱۶ \end{bmatrix} - ۹/۲۰۰ \begin{bmatrix} ۰/۱۷۶ \\ -۰/۱۱۲ \\ ۰/۰۴۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲/۹۹۵ \\ ۲/۸۶۲ \\ -۰/۰۲۶ \end{bmatrix}$$

از هیچگونه دقتی برخوردار نیست.