جواب تمرین سری دوم

۱- مسئله ۲۴ از فصل ۳ کتاب روشهای محاسبات عددی با روش اسپلاین مرتبه ۲

x	۰	۱	۲	۳
y	۰	۰/۵	۲	۱/۵

پیاده سازی یک روش کافی است.

روش دوم : چون روش اسپلاین طبیعی است، می توان از روش دوم استفاده کرد.

برای نقطه داخلی $x_i = ۱$ داریم :

$$(x_i - x_{i-۱})f''(x_{i-۱}) + ۲(x_{i+۱} - x_{i-۱})f''(x_i) + (x_{i+۱} - x_i)f''(x_{i+۱}) =$$

$$\frac{۶}{x_{i+۱} - x_i}[f(x_{i+۱}) - f(x_i)] + \frac{۶}{x_i - x_{i-۱}}[f(x_{i-۱}) - f(x_i)]$$

$$(۱-۰)f''(۰) + ۲(۲-۰)f''(۱) + (۲-۱)f''(۲) = \frac{۶}{۲-۱}[۲-۰/۵] + \frac{۶}{۱-۰}[۰-۰/۵] \rightarrow ۴f''(۱) + f''(۲) = ۶ \quad \boxed{۱}$$

برای نقطه داخلی $x_i = ۲$ داریم :

$$(x_i - x_{i-۱})f''(x_{i-۱}) + ۲(x_{i+۱} - x_{i-۱})f''(x_i) + (x_{i+۱} - x_i)f''(x_{i+۱}) =$$

$$\frac{۶}{x_{i+۱} - x_i}[f(x_{i+۱}) - f(x_i)] + \frac{۶}{x_i - x_{i-۱}}[f(x_{i-۱}) - f(x_i)]$$

$$(۲-۱)f''(۱) + ۲(۳-۱)f''(۲) + (۳-۲)f''(۳) = \frac{۶}{۳-۲}[۱/۵-۲)] + \frac{۶}{۲-۱}[۰/۵-۲] \rightarrow f''(۱) + ۴f''(۲) = -۱۲ \quad \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱}, \boxed{۲} \rightarrow f''(۱) = ۲/۴ \ , \ f''(۲) = -۳/۶$$

$$f_i(x) = \frac{f''(x_{i-۱})}{۶(x_i - x_{i-۱})}(x_i - x)^۳ + \frac{f''(x_i)}{۶(x_i - x_{i-۱})}(x - x_{i-۱})^۳ + \left[\frac{f(x_{i-۱})}{x_i - x_{i-۱}} - \frac{f''(x_{i-۱})(x_i - x_{i-۱})}{۶}\right](x_i - x)$$
$$+ \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-۱}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-۱})}{۶}\right](x - x_{i-۱})$$

$$f_۱(x) = \frac{f''(۰)}{۶(۱-۰)}(۱-x)^۳ + \frac{f''(۱)}{۶(۱-۰)}(x-۰)^۳ + \left[\frac{۰}{۱-۰} - \frac{f''(۰)(۱-۰)}{۶}\right](۱-x) + \left[\frac{f(۱)}{۱-۰} - \frac{f''(۱)(۱-۰)}{۶}\right](x-۰)$$

$$f_۱(x) = ۰ + \frac{۲/۴}{۶(۱-۰)}(x-۰)^۳ + \left[\frac{۰/۵}{۱-۰} - \frac{۲/۴(۱-۰)}{۶}\right](x-۰) \rightarrow \boxed{f_۱(x) = ۰/۴x^۳ + ۰/۱x \ : \ ۰ < x \le ۱}$$

$$f_۲(x) = \frac{f''(۱)}{۶(۲-۱)}(۲-x)^۳ + \frac{f''(۲)}{۶(۲-۱)}(x-۱)^۳ + \left[\frac{f(۱)}{۲-۱} - \frac{f''(۱)(۲-۱)}{۶}\right](۲-x) + \left[\frac{f(۲)}{۲-۱} - \frac{f''(۲)(۲-۱)}{۶}\right](x-۱)$$

$$f_۲(x) = \frac{۲/۴}{۶(۲-۱)}(۲-x)^۳ + \frac{-۳/۶}{۶(۲-۱)}(x-۱)^۳ + \left[\frac{۰/۵}{۲-۱} - \frac{۲/۴(۲-۱)}{۶}\right](۲-x) + \left[\frac{۲}{۲-۱} - \frac{-۳/۶(۲-۱)}{۶}\right](x-۱)$$

$$\boxed{f_۲(x) = ۰/۴(۲-x)^۳ - ۰/۶(x-۱)^۳ + ۰/۱(۲-x) + ۲/۶(x-۱) \ : \ ۱ \le x \le ۲}$$

$$f_۳(x) = \frac{f''(۲)}{۶(۳-۲)}(۳-x)^۳ + \frac{f''(۳)}{۶(۳-۲)}(x-۲)^۳ + \left[\frac{f(۲)}{۳-۲} - \frac{f''(۲)(۳-۲)}{۶}\right](۳-x) + \left[\frac{f(۳)}{۳-۲} - \frac{f''(۳)(۳-۲)}{۶}\right](x-۲)$$

$$f_۳(x) = \frac{-۳/۶}{۶(۳-۲)}(۳-x)^۳ + ۰ + \left[\frac{۲}{۳-۲} - \frac{-۳/۶(۳-۲)}{۶}\right](۳-x) + \left[\frac{۱/۵}{۳-۲} - ۰\right](x-۲)$$

$$\boxed{f_۳(x) = -۰/۶(۳-x)^۳ + ۲/۶(۳-x) + ۱/۵(x-۲) \ : \ ۲ \le x < ۳}$$

۲-

$$\nabla = hD - \frac{h^۲}{۲!}D^۲ + \frac{h^۳}{۳!}D^۳ - + \ldots \rightarrow \nabla \propto h$$

$$D^۳ = \frac{۱}{h^۳}\left(\nabla + \frac{\nabla^۲}{۲} + \frac{\nabla^۳}{۳} + \ldots\right)^۳ = \frac{۱}{h^۳}\left[\nabla^۲ + (\frac{\nabla^۲}{۲})^۲ + ۲(\nabla)(\frac{\nabla^۲}{۲}) + ۲(\nabla)(\frac{\nabla^۳}{۳})\right]\left(\nabla + \frac{\nabla^۲}{۲} + \frac{\nabla^۳}{۳} + \ldots\right)$$

$$D^۳ = \frac{۱}{h^۳}\left[\nabla^۲ + \nabla^۳ + \frac{۱۱}{۱۲}\nabla^۴\right]\left(\nabla + \frac{\nabla^۲}{۲} + \frac{\nabla^۳}{۳} + \ldots\right) = \frac{۱}{h^۳}\left[\nabla^۳ + \nabla^۴ + \frac{۱۱}{۱۲}\nabla^۵ + \frac{\nabla^۴}{۲} + \frac{\Delta^۵}{۲} + \frac{\Delta^۵}{۳}\right]$$

$$D^۳ = \frac{۱}{h^۳}\left[\nabla^۳ + ۱/۵\nabla^۴ + ۱/۷۵\nabla^۵\right],\ \nabla^۳ = y_i - ۳y_{i-۱} + ۳y_{i-۲} - y_{i-۳},$$

$$\nabla^۴ = y_i - ۴y_{i-۱} + ۶y_{i-۲} - ۴y_{i-۳} + y_{i-۴},\ \nabla^۵ = y_i - ۵y_{i-۱} + ۱۰y_{i-۲} - ۱۰y_{i-۳} + ۵y_{i-۴} - y_{i-۵}$$

$$y_۰''' = \frac{-۱/۷۵y_{i-۵} + ۱۰/۲۵y_{i-۴} - ۲۴/۵y_{i-۳} + ۲۹/۵y_{i-۲} - ۱۷/۷۵y_{i-۱} + ۴/۲۵y_i}{h^۳}$$

مسئله ۲۷ از فصل ۳ کتاب روشهای محاسبات عددی :

ساعت	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
دما	۱۶	۲۲	۲۶	۲۸	۲۴	۲۱	۱۸

$$y''' = \frac{-۱/۷۵(۱۶) + ۱۰/۲۵(۲۲) - ۲۴/۵(۲۶) + ۲۹/۵(۲۸) - ۱۷/۷۵(۲۴) + ۴/۲۵(۲۱)}{۲^۳} = ۶/۲۱۸۷۵$$

۳- مسئله ۱ قسمت ج از فصل ۴ کتاب روشهای محاسبات عددی با روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ کلاسیک

چون خطا تقریبا برابر $۳h^۵ = ۰/۰۰۰۰۳$ است، دقت نتیجه چهار رقم اعشار خواهد بود. پس محاسبات میانی با ۵ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$y' + ytg(x) = \sin(۲x) \rightarrow y' = -ytg(x) + \sin(۲x) = f(x,y)\quad ,\ x \in [۰,۰/۵]\ ,\ h = ۰/۱\ ,\ y(۰) = ۱$$

$$i = ۰ :\ k_۱ = hf(x_۰, y_۰) = ۰/۱f(۰,۱) = ۰$$

$$k_۲ = hf(x_۰ + ۰/۵h, y_۰ + ۰/۵k_۱) = ۰/۱f(۰+۰/۰۵, ۱+۰) = ۰/۰۰۴۹۸$$

$$k_۳ = hf(x_۰ + ۰/۵h, y_۰ + ۰/۵k_۲) = ۰/۱f(۰+۰/۰۵, ۱+۰/۰۰۲۴۹) = ۰/۰۰۴۹۷$$

$$k_۴ = hf(x_۰ + h, y_۰ + k_۳) = ۰/۱f(۰+۰/۱, ۱+۰/۰۰۴۹۷) = ۰/۰۰۹۷۸$$

$$y_۱ = y(۰/۱) = y_۰ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۰۰۴۹۵$$

$$i = ۱ :\ k_۱ = hf(x_۱, y_۱) = ۰/۱f(۰/۱, ۱/۰۰۴۹۵) = ۰/۰۰۹۷۸$$

$$k_۲ = hf(x_۱ + ۰/۵h, y_۱ + ۰/۵k_۱) = ۰/۱f(۰/۱+۰/۰۵, ۱/۰۰۴۹۵+۰/۰۰۴۸۹) = ۰/۰۱۴۲۹$$

$$k_۳ = hf(x_۱ + ۰/۵h, y_۱ + ۰/۵k_۲) = ۰/۱f(۰/۱+۰/۰۵, ۱/۰۰۴۹۵+۰/۰۰۷۱۵) = ۰/۰۱۴۲۶$$

$$k_۴ = hf(x_۱ + h, y_۱ + k_۳) = ۰/۱f(۰/۱+۰/۱, ۱/۰۰۴۹۵+۰/۰۱۴۲۶) = ۰/۰۱۸۲۸$$

$$y_۲ = y(۰/۲) = y_۱ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۰۱۹۱۴$$

$$i = ۲ :\ k_۱ = hf(x_۲, y_۲) = ۰/۱f(۰/۲, ۱/۰۱۹۱۴) = ۰/۰۱۸۲۸$$

$$k_۲ = hf(x_۲ + ۰/۵h, y_۲ + ۰/۵k_۱) = ۰/۱f(۰/۲+۰/۰۵, ۱/۰۱۹۱۴+۰/۰۰۹۱۴) = ۰/۰۲۱۶۹$$

$$k_۳ = hf(x_۲ + ۰/۵h, y_۲ + ۰/۵k_۲) = ۰/۱f(۰/۲+۰/۰۵, ۱/۰۱۹۱۴+۰/۰۱۰۸۵) = ۰/۰۲۱۶۴$$

$$k_۴ = hf(x_۲ + h, y_۲ + k_۳) = ۰/۱f(۰/۲+۰/۱, ۱/۰۱۹۱۴+۰/۰۲۱۶۴) = ۰/۰۲۴۲۷$$

$$y_۳ = y(۰/۳) = y_۲ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۰۴۰۶۸$$

$$i=۳ : \ k_۱ = hf(x_۳, y_۳) = ۰/۱f(۰/۳, ۱/۰۴۰۶۸) = ۰/۰۲۴۲۷$$
$$k_۲ = hf(x_۳ + ۰/۵h, y_۳ + ۰/۵k_۱) = ۰/۱f(۰/۳ + ۰/۰۵, ۱/۰۴۰۶۸ + ۰/۰۱۲۱۴) = ۰/۰۲۵۹۹$$
$$k_۳ = hf(x_۳ + ۰/۵h, y_۳ + ۰/۵k_۲) = ۰/۱f(۰/۳ + ۰/۰۵, ۱/۰۴۰۶۸ + ۰/۰۱۳۰۰) = ۰/۰۲۵۹۶$$
$$k_۴ = hf(x_۳ + h, y_۳ + k_۳) = ۰/۱f(۰/۳ + ۰/۱, ۱/۰۴۰۶۸ + ۰/۰۲۵۹۶) = ۰/۰۲۶۶۴$$
$$y_۴ = y(۰/۴) = y_۳ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۰۶۶۴۸$$

$$i=۴ : \ k_۱ = hf(x_۴, y_۴) = ۰/۱f(۰/۴, ۱/۰۶۶۴۸) = ۰/۰۲۶۶۵$$
$$k_۲ = hf(x_۴ + ۰/۵h, y_۴ + ۰/۵k_۱) = ۰/۱f(۰/۴ + ۰/۰۵, ۱/۰۶۶۴۸ + ۰/۰۱۳۳۳) = ۰/۰۲۶۱۷$$
$$k_۳ = hf(x_۴ + ۰/۵h, y_۴ + ۰/۵k_۲) = ۰/۱f(۰/۴ + ۰/۰۵, ۱/۰۶۶۴۸ + ۰/۰۱۳۰۹) = ۰/۰۲۶۱۸$$
$$k_۴ = hf(x_۴ + h, y_۴ + k_۳) = ۰/۱f(۰/۴ + ۰/۱, ۱/۰۶۶۴۸ + ۰/۰۲۶۱۸) = ۰/۰۲۴۴۵$$
$$y_۵ = y(۰/۵) = y_۴ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۱/۰۹۲۴۵$$

۴- مسئله ۱۴ از کتاب روشهای محاسبات عددی از فصل ۴ با روش رانگ کوتا مرتبه ۲ (پیراسته اویلر)

$$x^۲y'' - ۲xy' + ۲y = ۰ \quad , \ x \in [۱, ۱/۵] \ , \ h = ۰/۱ \ , \ y(۱) = ۴ \ , \ y'(۱) = ۹$$

چون خطا تقریبا برابر $۳h^۳ = ۰/۰۰۳$ است، دقت نتیجه دو رقم اعشار خواهد بود. پس محاسبات میانی با ۳ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$\begin{cases} y' = p = f_۱(x, y, p) \\ p' = \dfrac{۲xp - ۲y}{x^۲} = f_۲(x, y, p) \end{cases} , \ \begin{cases} y(۱) = ۴ = y_۰ \\ p(۱) = ۹ = p_۰ \end{cases} \ , \ x_۰ = ۱ \ ,$$

$$\begin{cases} y_{i+۱} = y_i + \dfrac{h}{۲}[f_۱(x_i, y_i, p_i) + f_۱(x_{i+۱}, y_i + hf_۱(x_i, y_i, p_i), p_i + hf_۲(x_i, y_i, p_i))] \\ p_{i+۱} = p_i + \dfrac{h}{۲}[f_۲(x_i, y_i, p_i) + f_۲(x_{i+۱}, y_i + hf_۱(x_i, y_i, p_i), p_i + hf_۲(x_i, y_i, p_i))] \end{cases}$$

$$i=۰ : \begin{cases} y_۱ = y_۰ + \dfrac{h}{۲}[f_۱(x_۰, y_۰, p_۰) + f_۱(x_۱, y_۰ + hf_۱(x_۰, y_۰, p_۰), p_۰ + hf_۲(x_۰, y_۰, p_۰))] \\ p_۱ = p_۰ + \dfrac{h}{۲}[f_۲(x_۰, y_۰, p_۰) + f_۲(x_۱, y_۰ + hf_۱(x_۰, y_۰, p_۰), p_۰ + hf_۲(x_۰, y_۰, p_۰))] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_۱ = ۴ + ۰/۰۵[۹ + f_۱(۱/۱, ۴ + ۰/۹, ۹ + ۰/۱\dfrac{۱۸-۸}{۱})] = ۴ + ۰/۰۵[۹ + f_۱(۱/۱, ۴/۹, ۱۰)] \\ p_۱ = ۹ + ۰/۰۵[\dfrac{۱۸-۸}{۱} + f_۲(۱/۱, ۴ + ۰/۹, ۹ + ۰/۱\dfrac{۱۸-۸}{۱})] = ۹ + ۰/۰۵[۱۰ + f_۲(۱/۱, ۴/۹, ۱۰)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_۱ = y(۱/۱) = ۴ + ۰/۰۵[۹ + ۱۰] = ۴/۹۵ \\ p_۱ = p(۱/۱) = ۹ + ۰/۰۵[۱۰ + \dfrac{۲۲ - ۹/۸}{۱/۲۱}] = ۱۰/۰۰۴ \end{cases}$$

$$i=۱ : \begin{cases} y_۲ = y_۱ + \dfrac{h}{۲}[f_۱(x_۱, y_۱, p_۱) + f_۱(x_۲, y_۱ + hf_۱(x_۱, y_۱, p_۱), p_۱ + hf_۲(x_۱, y_۱, p_۱))] \\ p_۲ = p_۱ + \dfrac{h}{۲}[f_۲(x_۱, y_۱, p_۱) + f_۲(x_۲, y_۱ + hf_۱(x_۱, y_۱, p_۱), p_۱ + hf_۲(x_۱, y_۱, p_۱))] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 4/95 + 0/05[10/004 + f_1(1/2, 4/95 + 1/000, 10/004 + 1/001)] \\ p_2 = 10/004 + 0/05[\frac{(2/2)(10/004) - 2(4/95)}{1/21} + f_2(1/2, 4/95 + 1/000, 10/004 + 1/001)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = y(1/2) = 4/95 + 0/05[10/004 + 11/005] = 6/000 \\ p_2 = p(1/2) = 10/004 + 0/05[10/007 + \frac{(2/4)(11/005) - 2(5/950)}{1/44}] = 11/008 \end{cases}$$

$$i = 2: \begin{cases} y_3 = y_2 + \frac{h}{2}[f_1(x_2, y_2, p_2) + f_1(x_3, y_2 + hf_1(x_2, y_2, p_2), p_2 + hf_2(x_2, y_2, p_2))] \\ p_3 = p_2 + \frac{h}{2}[f_2(x_2, y_2, p_2) + f_2(x_3, y_2 + hf_1(x_2, y_2, p_2), p_2 + hf_2(x_2, y_2, p_2))] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 6/000 + 0/05[11/008 + f_1(1/3, 6/000 + 1/055, 11/008 + 1/001)] \\ p_3 = 11/008 + 0/05[\frac{(2/4)(11/008) - 2(6/000)}{1/44} + f_2(1/3, 6/000 + 1/055, 11/008 + 1/001)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = y(1/3) = 6/000 + 0/05[11/008 + 12/009] = 7/151 \\ p_3 = p(1/3) = 11/008 + 0/05[10/013 + \frac{(2/6)(12/009) - 2(7/055)}{1/69}] = 12/015 \end{cases}$$

$$i = 3: \begin{cases} y_4 = y_3 + \frac{h}{2}[f_1(x_3, y_3, p_3) + f_1(x_4, y_3 + hf_1(x_3, y_3, p_3), p_3 + hf_2(x_3, y_3, p_3))] \\ p_4 = p_3 + \frac{h}{2}[f_2(x_3, y_3, p_3) + f_2(x_4, y_3 + hf_1(x_3, y_3, p_3), p_3 + hf_2(x_3, y_3, p_3))] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = 7/151 + 0/05[12/015 + f_1(1/4, 7/151 + 1/202, 12/015 + 1/002)] \\ p_4 = 12/015 + 0/05[\frac{(2/6)(12/015) - 2(7/151)}{1/69} + f_2(1/4, 7/151 + 1/202, 12/015 + 1/002)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = y(1/4) = 7/151 + 0/05[12/015 + 13/017] = 8/403 \\ p_4 = p(1/4) = 12/015 + 0/05[10/022 + \frac{(2/8)(13/017) - 2(8/353)}{1/96}] = 13/020 \end{cases}$$

$$i = 4: \begin{cases} y_5 = y_4 + \frac{h}{2}[f_1(x_4, y_4, p_4) + f_1(x_5, y_4 + hf_1(x_4, y_4, p_4), p_4 + hf_2(x_4, y_4, p_4))] \\ p_5 = p_4 + \frac{h}{2}[f_2(x_4, y_4, p_4) + f_2(x_5, y_4 + hf_1(x_4, y_4, p_4), p_4 + hf_2(x_4, y_4, p_4))] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_5 = 8/403 + 0/05[13/020 + f_1(1/5, 8/403 + 1/302, 13/020 + 1/003)] \\ p_5 = 13/020 + 0/05[\frac{(2/8)(13/020) - 2(8/403)}{1/96} + f_2(1/5, 8/403 + 1/302, 13/020 + 1/003)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_5 = y(1/5) = 8/403 + 0/05[13/020 + 14/023] = 9/754 \\ p_5 = p(1/5) = 13/020 + 0/05[10/026 + \frac{2(1/5)(14/023) - 2(9/705)}{2/25}] = 14/025 \end{cases}$$

با اجرای دستورالعمل ذیل :

```
[x,y] = ode45(@(x,y) exp(x*y), [0 0.3], 1);
```

پاسخ معادله سوال ۳ بدست می آید. در صورتی که دستور s1=size(y) اجرا شود اندازه y برابر یک بردار ستونی با ۴۱ ردیف خواهد شد که y(41,1)=1.092445379797449 می شود که در مقایسه با جواب معادله ۳ نشان می دهد که جواب سوال ۳ دارای دقت ۵ اعشار است.

با تعریف تابع ذیل :

```
function dydx = vdp1(x,y)
dydx = [y(2);(2*x*y(2)-2*y(1))/x^2];
```

و سپس اجرای دستورالعمل :

```
[x,y] = ode45(@vdp1, [1 1.5], [4;9]);
```

پاسخ معادله سوال ۴ بدست می آید. در صورتی که دستور s1=size(y) اجرا شود اندازه y برابر یک ماتریس با سه ستوان و ۴۱ ردیف خواهد شد که y(41,1)=9.749999999244494 می شود که در مقایسه با جواب معادله 4 نشان می دهد که جواب سوال 4 دارای دقت ۲ اعشار است.