تمرینات سری صفر: یادآوری و نماد اندیسی

در تمرین‌های ۲ تا ۷ از نماد اندیسی (دلتای کرونکر و نماد جایگشتی) استفاده کنید و برای کنترل پاسخ‌های عددی می‌توانید از متلب یا پایتون کمک بگیرید.

تمرین ۱ – یادآوری بردارها

سه بردار زیر مفروض‌اند:

$$A = (1, 2, 3), \quad B = (2, -1, 1), \quad C = (0, 1, 2)$$

الف) حاصل‌ضرب داخلی $A \cdot B$ و کسینوس زاویه‌ی بین B و A را بیابید

ب) حاصل‌ضرب خارجی $A \times B$ و بردار یکه در جهت آن را بیابید

پ) حاصل‌ضرب سه‌گانه‌ی $A \cdot (B \times C)$ (را حساب کنید و مفهوم هندسی آن را بنویسید. نتیجه تانسور مرتبه چند است؟

تمرین ۲ – دلتای کرونکر و نماد جایگشتی

اندیس‌ها از ۱ تا ۳ تغییر می‌کنند.

الف) مقادیر δ_{ii} ، $\delta_{ij}\delta_{ij}$ و $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$ را بیابید (راهنما: رابطه‌ی زیر را به کار ببرید) .

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$$

ب) نشان دهید $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$ و سپس $\partial x_i/\partial x_i$ را در سه بعد حساب کنید

پ) مقادیر $e_{ijk}\delta_{jk}$ ، $e_{ijk}e_{ijk}$ و $e_{ijk}e_{ijl}$ را بیابید. (راهنما: رابطه‌ی زیر را به کار ببرید)

$$e_{ijk}\, e_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

ت) مقدار .(نماد جایگشتی پنج‌اندیسی) را از روی زوج یا فرد بودن جایگشت تعیین کنید e_{25134}

تمرین ۳ – اثبات اندیسی رابطه‌ی بردارها

الف) با نماد اندیسی ثابت کنید:

$$A \times (B \times C) = B\,(A \cdot C) - C\,(A \cdot B)$$

ب) درستی رابطه را برای بردارهای تمرین ۱ به‌صورت عددی کنترل کنید.

تمرین ۴ – دترمینان با نماد جایگشتی

الف) برای ماتریس زیر، دترمینان را از رابطه‌ی $|A| = e_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}$ باز کنید (شش جمله) و مقدار آن را بیابید

$$M = [\,2\ \ 1\ \ 3\,;\ \ 0\ \ 4\ \ 1\,;\ \ 5\ \ 2\ \ 6\,]$$

ب) دترمینان ماتریس $N = [\,1\,2\,3\,;\,4\,5\,6\,;\,7\,8\,9\,]$ را بیابید و علت مقدار آن را توضیح دهید

درس: ریاضیات مهندسی — استاد: دکتر قاسم زاده

دوره: کارشناسی ارشد — دانشکده عمران دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پ) نتیجه را با دستور det در متلب مقایسه کنید

تمرین ۵ – گرادیان

تابع نرده‌ای و نقطه‌ی زیر مفروض‌اند:

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + yz^2 , \quad P(1, 2, -1)$$

الف) گرادیان تابع را در این نقطه بیابید.

ب) مشتق جهتی تابع را در این نقطه و در جهت بردار زیر حساب کنید:

$$a = (1, -2, 2)$$

پ) بیشترین نرخ افزایش تابع در این نقطه و جهت آن را بیابید.

ت) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی تراز ۴ تابع $(\varphi = 4)$ را در این نقطه بنویسید.

تمرین ۶ – دیورژانس و کرل

میدان برداری زیر مفروض است:

$$F = (x^2y , \ y^2z , \ z^2x)$$

الف) دیورژانس میدان را بیابید.

ب) کرل میدان را با استفاده از رابطه‌ی اندیسی زیر بیابید:

$$(\nabla \times F)_i = e_{ijk} F_{k,j}$$

پ) مقدار دیورژانس و کرل را در همان نقطه‌ی تمرین ۵ حساب کنید.

ت) نشان دهید دیورژانسِ کرلِ این میدان صفر است.

تمرین ۷ – اتحادهای برداری و لاپلاسین در مختصات منحنی‌الخط

الف) با نماد اندیسی ثابت کنید کرل گرادیان هر تابع نرده‌ای صفر است:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

ب) با نماد اندیسی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$\nabla \cdot (fA) = f \nabla \cdot A + A \cdot \nabla f$$

پ) با استفاده از فرمول لاپلاسین در مختصات کروی نشان دهید لاپلاسین معکوس فاصله از مبدأ در همه‌ی نقاط غیر از مبدأ صفر است؛ سپس با فرمول لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای نشان دهید لاپلاسین لگاریتم طبیعی فاصله از محور نیز در همه‌ی نقاط غیر از محور صفر است:

$$\nabla^2(1/r) = 0 \,, \quad \nabla^2(\ln r) = 0$$

تمرین ۸ – قضیه‌ی گرین در صفحه

ناحیه‌ی محدود بین دو منحنی زیر مفروض است و مرز آن در جهت پادساعتگرد پیموده می‌شود:

$$y = x^2 \,, \quad y = x$$

انتگرال خطی زیر را روی این مرز حساب کنید:

$$\oint y^2\,dx + x^2\,dy$$

الف) با استفاده از قضیه‌ی گرین.

ب) با محاسبه‌ی مستقیم انتگرال خطی روی دو بخش مرز و مقایسه‌ی نتیجه با بخش الف.

تمرین ۹ – قضیه‌ی دیورژانس

شار میدان برداری زیر را از کره‌ی داده‌شده (با بردار یکه‌ی عمود خارجی) حساب کنید:

$$F = (x^3, y^3, z^3) \,, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

الف) با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و مختصات کروی، که المان حجم در آن چنین است:

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

ب) نتیجه را با محاسبه‌ی مستقیم انتگرال سطحی کنترل کنید.

تمرین ۱۰ – قضیه‌ی استوکس

میدان برداری و قرص زیر را در نظر بگیرید. قرص در صفحه‌ی افقی قرار دارد و نرمال آن رو به بالاست و مرز آن در جهت پادساعتگرد پیموده می‌شود:

$$F = (y^2, x, z^2) \,, \quad S: x^2 + y^2 \le 4 \,,\ z = 0$$

الف) انتگرال خطی میدان روی مرز قرص را با استفاده از قضیه‌ی استوکس حساب کنید.

ب) همان انتگرال را با پارامتری کردن دایره‌ی مرزی به‌صورت زیر مستقیماً حساب کنید و دو نتیجه را مقایسه کنید:

$$x = 2\cos t \,, \quad y = 2\sin t$$