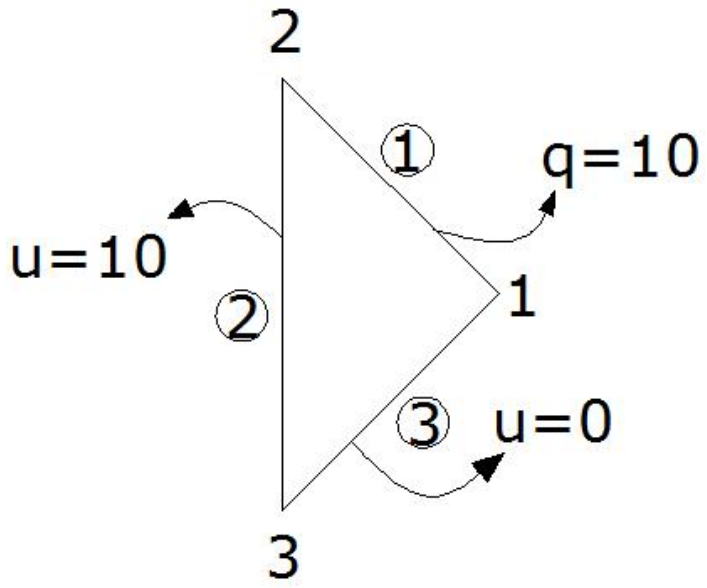
باسمه تعالی

مثال: محیطی به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است را در نظر بگیرید. شرایط مرزی در شکل نشان داده شده است. مقادیر u و q را مطابق با روش اجزای مرزی بدست آورید.



مختصات گره ها به صورت زیر میباشد:

شماره گره	X	Y
1	1	1
2	0	2
3	0	0

حل:

داریم که:

$$a_x = \frac{x_1 - x_2}{2} \qquad b_x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad a_y = \frac{y_1 - y_2}{2} \qquad b_y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

با توجه به روش انتگرال گیری گوس داریم که:

$$x_{co} = a_x \times K + b_x \qquad y_{co} = a_y \times K + b_y$$

$$r = \sqrt{(x_p - x_{co})^2 + (y_p - y_{co})^2}$$

با در نظر گرفتن روش گوس چهارنقطه ای داریم که:

$$w(1) = 0.347854 \Rightarrow k_1 = 0.861136 \qquad w(2) = 0.347854 \Rightarrow k_2 = -0.861136$$

$$w(3) = 0.652145 \Rightarrow k_3 = 0.339981 \qquad w(4) = 0.65214 \Rightarrow k_4 = -0.339981$$

داشتیم که معادله اصلی اجزای مرزی به شکل ماتریسی به صورت زیر میباشد:

HU=GQ

که در آن ماتریسهای H و G به صورت زیر تعریف میشوند:

در صورتیکه انتگرال ماتریس G وH را توسط روش انتگرال گیری گوس چهارنقطه ای انجام دهیم، انتگرال مربوطه به صورت زیر حساب میشود:

$$G^{ij} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2}$$

برای المان اول (از گره ۱ تا ۲) داریم:

G^{12}

با توجه به فرمولهائی که در بالا آورده شد، داریم که:

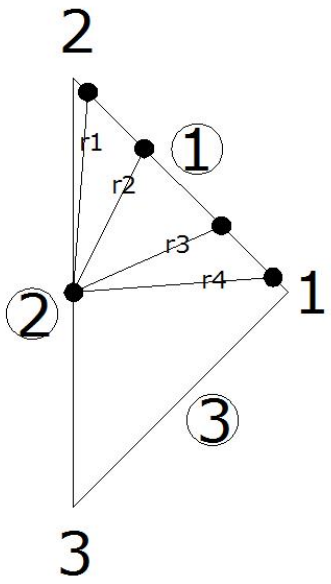
$$a_x = 0.5 \qquad b_x = 0.5$$
$$a_y = -0.5 \qquad b_y = 1.5$$

در روش انتگرال گیری گوس چهارنقطه ای ابتدا مختصات چهارنقطه ای که روی المان اول قرار گرفته شده است را بدست می آوریم.

$$(x_{co})_1 = 0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 0.93 \qquad (y_{co})_1 = -0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 1.069$$
$$(x_{co})2 = -0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 0.069 \qquad (y_{co})2 = 0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 1.93$$
$$(x_{co})3 = 0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 0.67 \qquad (y_{co})3 = -0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 1.33$$
$$(x_{co})4 = -0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 0.33 \qquad (y_{co})4 = 0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 1.67$$

سپس فاصله این نقاط را از نقطه وسطی که روی المان دیگر است بدست می آوریم. به این دلیل فاصله را تا نقطه وسط المان دیگر بایستی بدست آوریم که در این مثال فرض شده است که تغییرات u و q روی هر المان صفر است و برابر با مقدار این مقادیر در وسط المان مذکور میباشد.

$$(r)_1 = \sqrt{((0.069-0)^2 + (1.93-1.0)^2)} = 0.932$$
$$(r)_2 = \sqrt{((0.33-0)^2 + (1.67-1.0)^2)} = 0.747$$
$$(r)_3 = \sqrt{((0.67-0)^2 + (1.33-1.0)^2)} = 0.747$$
$$(r)_4 = \sqrt{((0.93-0)^2 + (1.069-1.0)^2)} = 0.932$$



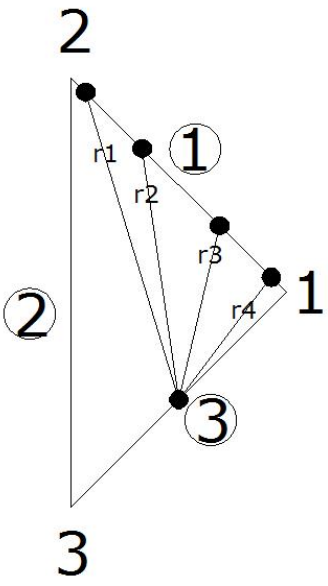
سپس با توجه به فرمولی که در بالا آورده شد مقدار G را به طریق زیر بدست می آوریم.

$$\sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k = \ln(\frac{1}{0.932}) \times 0.347854 + \ln(\frac{1}{0.747}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.747}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.932}) \times 0.347854 =$$
$$= 0.431$$
$$G^{12} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \times 0.431 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.048$$

به طریق مشابهی که در بالا بدان اشاره گردید، دیگر پارامترهای ماتریس G را نیز حساب میکنیم.

G^{13}

$$(r)_1 = \sqrt{((0.069 - 0.5)^2 + (1.93 - 0.5)^2)} = 1.493$$
$$(r)_2 = \sqrt{((0.69 - 0.5)^2 + (1.93 - 0.5)^2)} = 1.442$$
$$(r)_3 = \sqrt{((0.67 - 0.5)^2 + (1.33 - 0.5)^2)} = 0.847$$
$$(r)_4 = \sqrt{((0.93 - 0.5)^2 + (1.069 - 0.5)^2)} = 0.713$$



$$\sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k = \ln(\frac{1}{1.493}) \times 0.347854 + \ln(\frac{1}{1.442}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.847}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.713}) \times 0.347854 =$$
$$= -0.153$$

$$G^{13} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \times -0.153 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.017$$

G^{21}

$a_x = 0 \qquad b_x = 1.0$
$a_y = 0 \qquad b_y = 1.0$

$(x_{co})_1 = 0 \qquad (y_{co})_1 = 1 \times 0.861136 + 1 = 1.86$
$(x_{co})2 = 0 \qquad (y_{co})2 = -1 \times 0.861136 + 1 = 0.138$
$(x_{co})3 = 0 \qquad (y_{co})3 = 1 \times 0.339981 + 1 = 1.339$
$(x_{co})4 = 0 \qquad (y_{co})4 = -1 \times 0.339981 + 1 = 0.66$

$(r)_1 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.86-1.5)^2)} = 0.616$
$(r)_2 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (0.138-1.5)^2)} = 1.451$
$(r)_3 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.339-1.5)^2)} = 0.525$
$(r)_4 = \sqrt{(0-0.5)^2 + (0.66-1.5)^2)} = 0.977$

$$\sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k = \ln(\frac{1}{0.616}) \times 0.347854 + \ln(\frac{1}{1.451}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.525}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.977}) \times 0.347854 =$$
$$= 0.354$$
$$G^{21} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \times (0.354) \times \frac{2}{2} = 0.056$$

G^{23}

$(r)_4 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.86-1.5)^2)} = 0.616$
$(r)_3 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (0.138-1.5)^2)} = 1.451$
$(r)_2 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.339-1.5)^2)} = 0.525$
$(r)_1 = \sqrt{(0-0.5)^2 + (0.66-1.5)^2)} = 0.977$

$$G^{23} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \times (0.354) \times \frac{2}{2} = 0.056$$

∘

G^{31}

$a_x = 0.5 \qquad b_x = 0.5$
$a_y = 0.5 \qquad b_y = 0.5$

$(x_{co})_1 = 0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 0.93 \qquad (y_{co})_1 = 0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 0.93$
$(x_{co})2 = -0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 0.069 \qquad (y_{co})2 = -0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 0.069$
$(x_{co})3 = 0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 0.67 \qquad (y_{co})3 = 0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 0.67$
$(x_{co})4 = -0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 0.33 \qquad (y_{co})4 = 0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 0.33$

$(r)_1 = \sqrt{((0.33-0.5)^2 + (0.33-1.5)^2)} = 1.182$
$(r)_2 = \sqrt{((0.67-0.5)^2 + (0.67-1.5)^2)} = 0.821$
$(r)_3 = \sqrt{((0.069-0.5)^2 + (0.069-1.5)^2)} = 1.494$
$(r)_4 = \sqrt{((0.93-0.5)^2 + (0.93-1.5)^2)} = 0.714$

$$\sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k = \ln(\frac{1}{1.182}) \times 0.347854 + \ln(\frac{1}{0.821}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.714}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{1.494}) \times 0.347854 =$$
$$= 0.150$$

$$G^{31} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \times (0.150) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.017$$

G^{32}

$(r)_1 = \sqrt{((0.33-0)^2 + (0.33-1.0)^2)} = 0.747$
$(r)_2 = \sqrt{((0.67-0)^2 + (0.67-1.0)^2)} = 0.747$
$(r)_3 = \sqrt{((0.069-0)^2 + (0.069-1.0)^2)} = 0.934$
$(r)_4 = \sqrt{((0.93-0)^2 + (0.93-1.0)^2)} = 0.934$

$$\sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k = \ln(\frac{1}{0.934}) \times 0.347854 + \ln(\frac{1}{0.747}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.747}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.934}) \times 0.347854 =$$
$$= 0.431$$

$$G^{32} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \times (0.431) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.048$$

طبق فرمولاسیون موجود در روش اجزای مرزی، پارامترهای ماتریس قطری را میتوان توسط رابطه ای که در زیر ارائه شده است بدست آورد. در این رابطه دیگر از قانون انتگرال گیری گوس استفاده نمیشود. بلکه تنها اقدام به ساده سازی رابطه انتگرالی اولیه شده است.

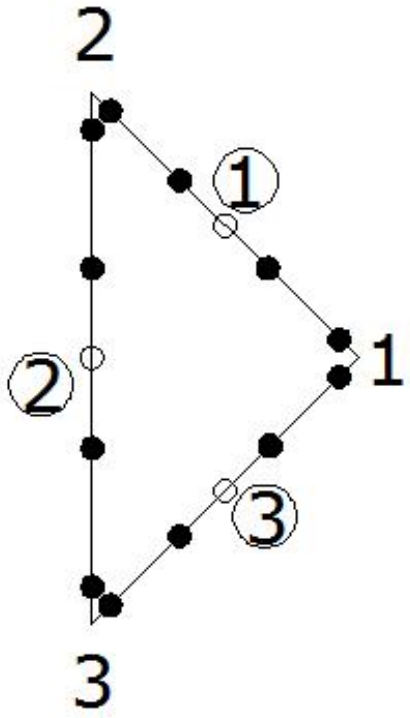
$$G^{ii} = \frac{L}{2\pi} \times \left[\ln(\frac{1}{L/2}) + 1 \right]$$

$$G^{11} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \times \left[\ln(\frac{1}{\sqrt{2}/2}) + 1 \right] = 0.303$$

$$G^{22} = \frac{2}{2\pi} \times \left[\ln(\frac{1}{2/2}) + 1 \right] = 0.318$$

$$G^{33} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \times \left[\ln(\frac{1}{\sqrt{2}/2}) + 1 \right] = 0.303$$

در شکل زیر محل نقاط گوسی بر روی المانها نشان داده شده است.



در نهایت با جایگذاری پارامترهای حساب شده، ماتریس G به صورت زیر بدست می‌آید

$$G^{ij} = \begin{bmatrix} 0.303 & 0.048 & -0.017 \\ 0.056 & 0.318 & 0.056 \\ 0.017 & 0.048 & 0.303 \end{bmatrix}$$

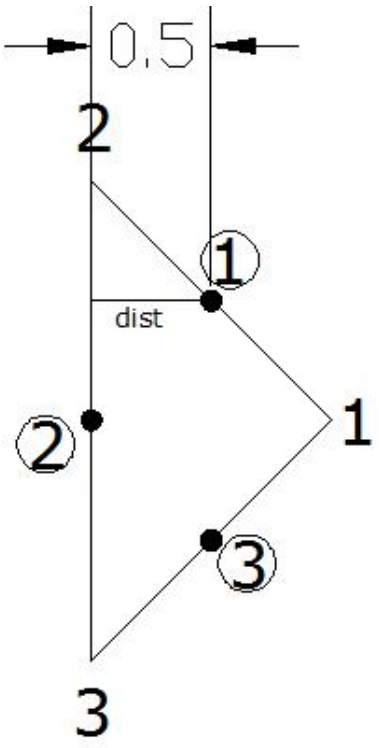
حال میخواهیم که ماتریس H را بدست آوریم.

در این قسمت بایستی فاصله عمود نقطه وسط هر المان مرزی را تا المان مرزی مورد نظر بدست آوریم. این پارامتر که با عنوان dist آورده شده است، در شکل نیز نشان داده شده است.

مطابق با حالت قبل، در محاسبه ماتریس H نیز از روش انتگرال گیری گوس استفاده میکنیم. فرمول محاسبه H با توجه به روش انتگرال گیری گوس ۴ نقطه ای به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H^{ij} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} -\frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2}$$

ابتدا اقدام به حساب کردن پارامتر H^{12} میکنیم. مقدار فاصله از نقطه وسط موجود در المان اول تا المان دوم معادل پارامتر dist میباشد که در شکل نیز نشان داده شده است.



H^{12}

$dist = 0.5$

همانطور که در قسمتهای پیشین نیز محاسبه شده بود فاصله نقاط گوس روی هر المان تا نقطه وسط المان دیگر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(r)_1 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.86-1.5)^2)} = 0.616$$
$$(r)_2 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (0.138-1.5)^2)} = 1.451$$
$$(r)_3 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.339-1.5)^2)} = 0.525$$
$$(r)_4 = \sqrt{(0-0.5)^2 + (0.66-1.5)^2)} = 0.977$$

با جایگذاری پارامترهای محاسبه شده، مقدار H به صورت زیر محاسبه میشود:

$$\sum_{k=1}^{4} (\frac{1}{(r)_k})^2 w_k = (\frac{1}{0.616})^2 \times 0.347854 + (\frac{1}{0.525})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{0.977})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{1.451})^2 \times 0.347854 =$$
$$= 4.131$$

$$H^{12} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} -\frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2} = \frac{-1}{2\pi} \times 4.131 \times 0.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.232$$

H^{32}

$dist = 0.5$

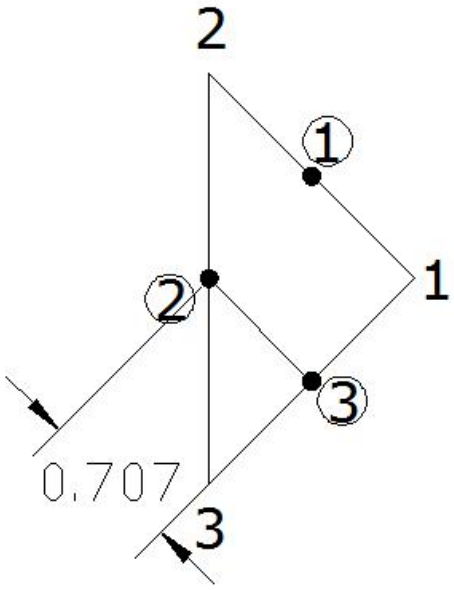
$$(r)_4 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.86-1.5)^2)} = 0.616$$
$$(r)_3 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (0.138-1.5)^2)} = 1.451$$
$$(r)_2 = \sqrt{((0-0.5)^2 + (1.339-1.5)^2)} = 0.525$$
$$(r)_1 = \sqrt{(0-0.5)^2 + (0.66-1.5)^2)} = 0.977$$

$$\sum_{k=1}^{4} (\frac{1}{(r)_k})^2 w_k = (\frac{1}{0.616})^2 \times 0.347854 + (\frac{1}{0.525})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{0.977})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{1.451})^2 \times 0.347854 =$$
$$= 4.131$$

$$H^{32} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} - \frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2} = \frac{-1}{2\pi} \times 4.131 \times 0.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.232$$

H^{23}

$dist = 0.707$



$$(r)_1 = \sqrt{((0.33-0)^2 + (0.33-1.0)^2)} = 0.747$$
$$(r)_2 = \sqrt{((0.67-0)^2 + (0.67-1.0)^2)} = 0.747$$
$$(r)_3 = \sqrt{((0.069-0)^2 + (0.069-1.0)^2)} = 0.934$$
$$(r)_4 = \sqrt{((0.93-0)^2 + (0.93-1.0)^2)} = 0.934$$

$$\sum_{k=1}^{4} (\frac{1}{(r)_k})^2 w_k = (\frac{1}{0.934})^2 \times 0.347854 + (\frac{1}{0.747})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{0.747})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{0934})^2 \times 0.347854 =$$
$$= 3.135$$

$$H^{23} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} - \frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2} = \frac{-1}{2\pi} \times (3.135) \times 0.707 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.176$$

H^{21}

$dist = 0.707$

$(r)_1 = \sqrt{((0.069-0)^2 + (1.93-1.0)^2)} = 0.932$
$(r)_2 = \sqrt{((0.33-0)^2 + (1.67-1.0)^2)} = 0.747$
$(r)_3 = \sqrt{((0.67-0)^2 + (1.33-1.0)^2)} = 0.747$
$(r)_4 = \sqrt{((0.93-0)^2 + (1.069-1.0)^2)} = 0.932$

$$H^{21} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} -\frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2} = \frac{-1}{2\pi} \times (3.135) \times 0.707 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.176$$

H^{31}

$dist = 0.707$

$(r)_1 = \sqrt{((0.069-0.5)^2 + (1.93-0.5)^2)} = 1.493$
$(r)_2 = \sqrt{((0.69-0.5)^2 + (1.93-0.5)^2)} = 1.442$
$(r)_3 = \sqrt{((0.67-0.5)^2 + (1.33-0.5)^2)} = 0.847$
$(r)_4 = \sqrt{((0.93-0.5)^2 + (1.069-0.5)^2)} = 0.713$

$$\sum_{k=1}^{4} (\frac{1}{(r)_k})^2 w_k = (\frac{1}{1.493})^2 \times 0.347854 + (\frac{1}{1.442})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{0.847})^2 \times 0.652145 + (\frac{1}{0.713})^2 \times 0.347854 =$$
$$= 2.063$$

$$H^{31} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} -\frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2} = \frac{-1}{2\pi} \times (2.063) \times 0.707 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.164$$

H^{13}

$dist = 0.707$

$$(r)_1 = \sqrt{((0.069-0.5)^2 + (1.93-0.5)^2)} = 1.493$$
$$(r)_2 = \sqrt{((0.69-0.5)^2 + (1.93-0.5)^2)} = 1.442$$
$$(r)_3 = \sqrt{((0.67-0.5)^2 + (1.33-0.5)^2)} = 0.847$$
$$(r)_4 = \sqrt{((0.93-0.5)^2 + (1.069-0.5)^2)} = 0.713$$

$$H^{13} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} - \frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2} = \frac{-1}{2\pi} \times (2.063) \times 0.707 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.164$$

$$H^{ii} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} H^{11} = 0 \\ H^{22} = 0 \\ H^{33} = 0 \end{matrix}$$

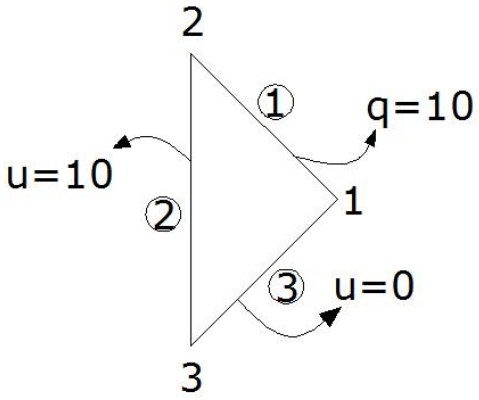
$$H^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -0.176 & -0.164 \\ & 0 & -0.232 \\ sym. & & 0 \end{bmatrix}$$

در انتهای با جایگزین کردن شرایط مرزی و همچنین ماتریسهای H و G به معادله زیر میرسیم که سه معادله، سه مجهول میباشد.

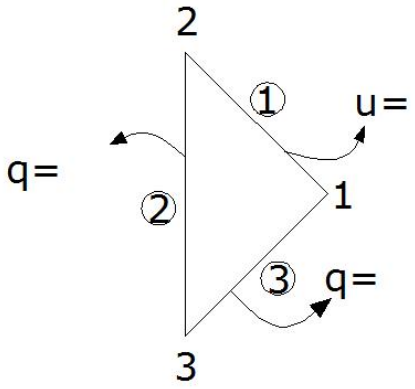
$$HU = GQ \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -0.176 & -0.164 \\ -0.176 & 0 & -0.232 \\ -0.164 & -0.232 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.303 & 0.048 & -0.017 \\ 0.056 & 0.318 & 0.056 \\ 0.017 & 0.048 & 0.303 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\overset{AX=F}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0.048 & -0.017 \\ 0.176 & 0.318 & 0.056 \\ 0.164 & 0.048 & 0.303 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.030 \\ -0.560 \\ -0.336 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = \\ q_2 = \\ q_3 = \end{matrix}$$

همانطور که مشاهده میشود به سادگی مقادیر u و q در مرزها بدست می‌آید.



شرایط مرزی اولیه



نتایج پس از روش اجزای مرزی