انتشار امواج در محیط متخلخل

مقدمه
معادلات خاک اشباع
انتشار امواج در خاک اشباع
انتشار امواج درخاک غیراشباع

Dr. Hasan Ghasemzadeh 2

مقدمه:

کاربرد انتشار امواج لرزه‌ای: ژئوتکنیک، مهندسی زلزله، ژئوفیزیک و لرزه شناسی

امواج لرزه ای ممکن است به وسیله یک

رویداد لرزه ای،

فروریزش یک حجم درپوسته زمین،

یک انفجار شیمیایی یا هسته ای و یا یک منبع ضربه سطحی تولید شوند

در گسترش امواج لرزه ای بخشی از انرژی تلف می شود و بخشی در سنگ و خاک پخش می‌شود

خصوصیات مکانیکی لایه های خاک از جمله اشباع بودن یا نبودن بر این امواج تاثیر می گذارند.

مسائل انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع اولین بار توسط بیوت (Biot 1956) و سپس توسط سایر محققین (Berryman و همکاران ۱۹۸۸ و سپس Yang 1999) برای محیط اشباع مطالعه شده است.

انتشار امواج در محیط متخلخل

معادلات خاک اشباع

انتشار امواج در خاک اشباع

انتشار امواج درخاک غیراشباع

انتشار امواج در محیط متخلخل

معادلات خاك اشباع

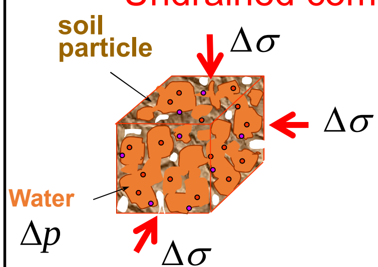
معادلات حاكم

بقای جرم آب و دانههای جامد
بقای ممنتوم آب و دانههای جامد
معادلات ساختاری و سازگاری

Dr. Hasan Ghasemzadeh 5

معادلات خاك اشباع

Undrained compression of a porous medium



$$\Delta V_f = -nC_f \Delta p V$$

$$\Delta V_s = -(1-n)C_s \Delta p V$$

C_f compressibility of the pore fluid

C_s compressibility of the solid

v fluid velocity

w Solid velocity

$$\sigma = \sigma' + \alpha p$$

$$\sigma' = \frac{-1}{C_m}\varepsilon$$

$$d\varepsilon = -C_m d\sigma'$$

α Biot's coefficient

C_m compressibility of the porous medium

$S_p = nC_f + (\alpha - n)C_s$ storativity

$\rho = n\rho_f + (1-n)\rho_s$ total density

Dr. Hasan Ghasemzadeh 6

معادلات خاک اشباع

Conservation of mass

pore fluid

$$\frac{\partial (n\rho_f)}{\partial t} + \frac{\partial (n\rho_f v)}{\partial x} = 0$$

فرض

$$\frac{d\rho_f}{dp} = \rho_f C_f$$

$$\rho_f \frac{\partial n}{\partial t} + n\frac{\partial \rho_f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial (nv)}{\partial x} + v\frac{\partial (n\rho_f)}{\partial x} = 0 \quad \left(v\frac{\partial (n\rho_f)}{\partial x} \approx 0\right)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + nC_f \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (nv)}{\partial x} = 0$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 7

معادلات خاک اشباع

Conservation of mass

solid

$$\frac{\partial\left[(1-n)\rho_s\right]}{\partial t} + \frac{\partial\left[(1-n)\rho_s w\right]}{\partial x} = 0$$

فرض

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{\rho_s C_s}{1-n}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - n\frac{\partial p}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + C_s\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - n\frac{\partial p}{\partial t}\right) + \frac{\partial (w)}{\partial x} - \frac{\partial (nw)}{\partial x} = 0$$

حذف $\frac{\partial n}{\partial t}$ در بقای جرم‌ها

$$n\left(C_f - C_s\right)\frac{\partial p}{\partial t} + C_s\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial (n(v-w))}{\partial x} = 0$$

or

$$S_p\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha\frac{\partial w}{\partial x} = S_p\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\partial (n(v-w))}{\partial x}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 8

معادلات خاک اشباع

Conservation of momentum

fluid

$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \tau n \rho_f \frac{\partial (v-w)}{\partial t} = -n\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa}(v-w)$$

τ tortuosity factor,

κ Intrinsic permeability of the porous medium m^2

specific discharge $q = n(v-w)$

In the absence of acceleration terms $q = -\frac{\kappa}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$

Darcy's law

Dr. Hasan Ghasemzadeh 9

معادلات خاک اشباع

Conservation of momentum

fluid plus particles

$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$\sigma = \sigma' + \alpha p \qquad n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$$

particles

$$(1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} - \tau n \rho_f \frac{\partial (v-w)}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - (\alpha - n)\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa}(v-w)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 10

معادلات خاک اشباع

Constitutive equation

one-dimensional case $$m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

m_v one-dimensional compressibility of the porous medium

$$m_v = \frac{1}{K + \frac{4}{3}G}$$

$K + \frac{4}{3}G$ → confined modulus

K Bulk modulus

G Shear modulus

Creep and irreversible plastic deformations can be considered

Dr. Hasan Ghasemzadeh 11

معادلات خاک اشباع

System of Equation

basic equations for the propagation of plane waves in a porous medium

total mass conservation $$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + S_p \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial (n(v-w))}{\partial x}$$

total momentum $$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$$

momentum of the pore fluid

generalization of Darcy's law $$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \tau n \rho_f \frac{\partial (v-w)}{\partial t} = -n\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa}(v-w)$$

stress-strain relation of the soil skeleton $$m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

12

Dr. Hasan Ghasemzadeh

انتشار امواج در محیط متخلخل

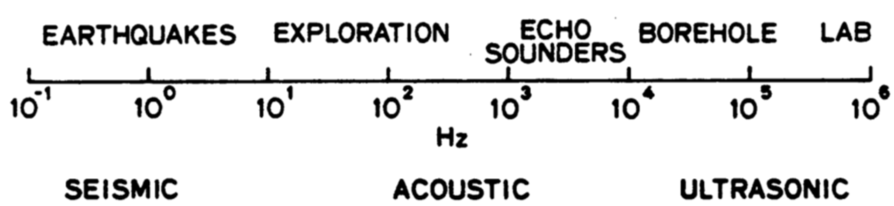
معادلات خاک اشباع

انتشار امواج در خاک اشباع

انتشار امواج درخاک غیراشباع

انتشار امواج در محیط متخلخل

محدوده تغییرات امواج با توجه به کاربردها



انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- روابط تنش - کرنش

$$-\phi p = (Qv_m + Rv_f)$$

$$-\sigma_{ij} - (1-\phi)p\delta_{ij} = 2\mu_m(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}v_m\delta_{ij}) + (K\,v_m + Qv_f)\delta_{ij}$$

انبساط حجمی فاز های اسکلت و سیال

$$v_m = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad v_f = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

δ_{ij} دلتا ی کرونکر

ثوابت گدانکن

$$K = \frac{(1-\phi)(1-\phi-K_m/K_s)K_s + \phi K_s K_m/K_f}{1-\phi-K_m/K_s+\phi K_s/K_f}$$

$$Q = \frac{(1-\phi)(1-\phi-K_m/K_s)\phi K_s}{1-\phi-K_m/K_s+\phi K_s/K_f}$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1-\phi-K_m/K_s+\phi K_s/K_f}$$

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- معادله مومنتوم فاز سیال:

$$-\phi\partial_i p = \partial_t(\rho_{12}v_j + \rho_{22}w_j) - b_0(v_j - w_j)$$

- معادله مومنتوم فاز جامد:

$$-\partial_j\sigma_{ij} - (1-\phi)\partial_i p = \partial_t(\rho_{11}v_j + \rho_{12}w_j) + b_0(v_j - w_j)$$

$$b_0 = \frac{\eta\phi^2}{k_0}$$

$$\rho_{12} = -\phi\rho_f(\tau - 1)$$

$$\rho_{22} = \phi\rho_f - \rho_{12}$$

$$\rho_{11} = (1-\phi)\rho_s - \rho_{12}$$

$$\tau = 1 - 0.5(1 - 1/\phi)$$

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- از ترکیب روابط تنش -کرنش و معادلات مومنتوم، معادلات موج برحسب جابه‌جایی فاز جامد و جابه‌جایی فاز سیال بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\rho_{12}\partial_t^2\mathbf{u}_s+\rho_{22}\partial_t^2\mathbf{u}_f-b_0\partial_t(\mathbf{u}_s-\mathbf{u}_f)=C\nabla\nabla.\mathbf{u}_s+R\nabla\nabla.\mathbf{u}_f$$

$$\rho_{11}\partial_t^2\mathbf{u}_s+\rho_{12}\partial_t^2\mathbf{u}_f+b_0\partial_t(\mathbf{u}_s-\mathbf{u}_f)=F\nabla\nabla.\mathbf{u}_s-G\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}_s+Q\nabla\nabla.\mathbf{u}_f$$

$$F=K+4\mu_m/3$$

$\mathbf{u}_s,\mathbf{u}_f$ جابه‌جایی فازهای اسکلت و سیال

- برای حل بردار جابه‌جایی فازجامد و فاز سیال را برحسب پتانسیل موج فشاری و پتانسیل موج برشی تجزیه می‌کنیم.سپس سیستم معادله دیفرانسیل جزئی بدست آمده را با استفاده از تبدیل انتگرالی فوریه به سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی در فضای فرکانس–عدد موج تبدیل و در نهایت روابط پراکنش امواج فشاری و برشی را بدست می‌آوریم.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 17

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- رابطه پراکنش امواج فشاری مطابق روبرو بدست می‌آید:

$$A_1 k_p{}^4 + A_2 k_p{}^2 + A_3 = 0$$

$$A_1=-Q^2+FR \qquad a_{11}=\rho_{11}-i\,\hat{b}\omega^{-1}$$

$$A_2=(-Ra_{11}+2Qa_{12}-Fa_{22})\omega^2 \qquad a_{12}=\rho_{12}+i\,\hat{b}\omega^{-1}$$

$$A_3=(-a_{12}^2+a_{11}a_{22})\omega^4 \qquad a_{22}=\rho_{22}-i\,\hat{b}\omega^{-1}$$

- که اعداد موج فشاری نوع اول و نوع دوم را نتیجه می‌دهد:

$$k_{p1}^2=\pm(\frac{(A_2^2-4A_1A_3)^{0.5}+A_2}{2A_1}) \qquad k_{p2}^2=\pm(\frac{(A_2^2-4A_1A_3)^{0.5}-A_2}{2A_1})$$

- رابطه پراکنش امواج برشی بصورت مقابل حاصل می‌شود:

- که عدد موج برشی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$-\mu_m\,a_{22}\omega^2k_s^2-a_{12}^2\omega^4+a_{11}a_{22}\omega^4=0$$

$$k_s^2=\pm\frac{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\omega^2}{\mu_m\,a_{22}}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 18

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- با توجه به اعداد موج بدست آمده سرعت و استهلاک ذاتی طبق تعریف بصورت زیر بدست می‌آید:

$$c_j = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_j)}$$ سرعت

$$Q_j^{-1} = 2\frac{\mathrm{Im}(k_j)}{\mathrm{Re}(k_j)}$$ استهلاک ذاتی

- که با قرار دادن $j = p_1$ و $j = p_2$ و $j = s$ بترتیب سرعت و استهلاک امواج فشاری نوع اول، فشاری نوع دوم و برشی بدست می‌آیند

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- خصوصیات مصالح مورد استفاده:

خصوصیات ماسه سنگ و ماسه

پارامتر	نشانه	واحد	ماسه‌سنگ	ماسه
تخلخل	ϕ	-	0.23	0.4
چگالی دانه‌های جامد	ρ_s	$kg\ m^{-3}$	2650	2600
مدول بالک اسکلت جامد	K_m	GPa	1.021	70×10^{-3}
مدول برشی اسکلت جامد	μ_m	GPa	1.441	35×10^{-3}
مدول بالک دانه‌های جامد	K_s	GPa	35	35
نفوذپذیری ذاتی	k_0	m^2	9×10^{-13}	1×10^{-10}

خصوصیات آب

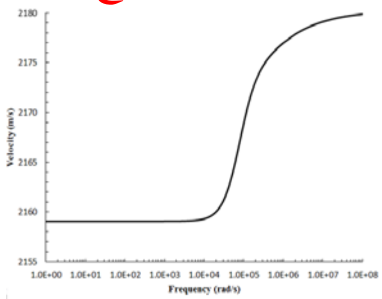
پارامتر	نشانه	واحد	مقدار
ویسکوزیته	η	Pa.s	1×10^{-3}
چگالی سیال	ρ_f	$kg\ m^{-3}$	1000
مدول بالک	K_f	GPa	2.25

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

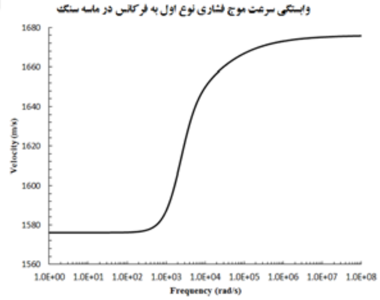
- سرعت موج فشاری نوع اول:

سرعت انتشار موج فشاری نوع اول در محدوده فرکانس پایین مستقل از فرکانس است. با افزایش فرکانس و رسیدن آن به فرکانس تبدیل وابستگی آن به سرعت افزوده و سپس کاهش می‌یابد.

وابستگی سرعت به فرکانس در ماسه قابل توجه‌تر از ماسه‌سنگ.



وابستگی سرعت موج فشاری نوع اول به فرکانس در ماسه سنگ



شکل ۳-۴ وابستگی سرعت موج فشاری نوع اول به فرکانس در ماسه

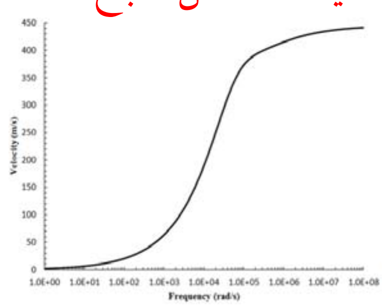
hasemzadeh 21

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

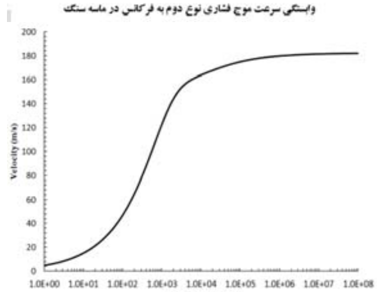
- سرعت موج فشاری نوع دوم:

موج فشاری نوع دوم بمراتب سرعت کمتری نسبت به موج نوع دوم دارد.

در محدوده فرکانس پایین سرعت بشدت به فرکانس وابسته است.



وابستگی سرعت موج فشاری نوع دوم به فرکانس در ماسه سنگ



وابستگی سرعت موج فشاری نوع دوم به فرکانس در ماسه

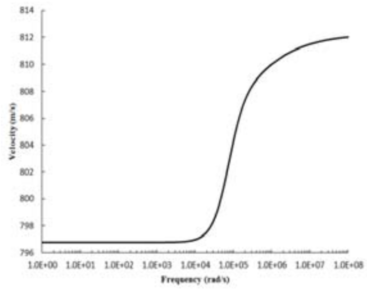
hasemzadeh 22

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

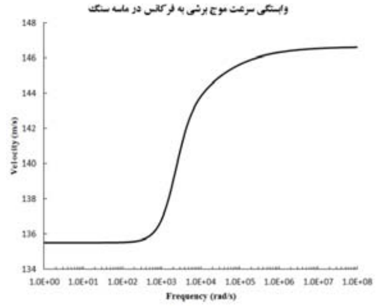
• سرعت موج برشی:

رفتار مشابه با موج فشاری نوع اول است اما وابستگی سرعت به فرکانس بسیار کمتر است.

سرعت موج برشی در ماسه سنگ بسیار بیشتر از ماسه است.



وابستگی سرعت موج برشی به فرکانس در ماسه سنگ



وابستگی سرعت موج برشی به فرکانس در ماسه

hasemzadeh 23

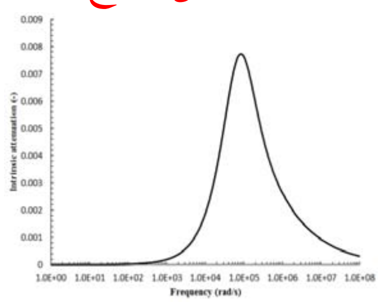
انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

• استهلاک ذاتی موج فشاری نوع اول:

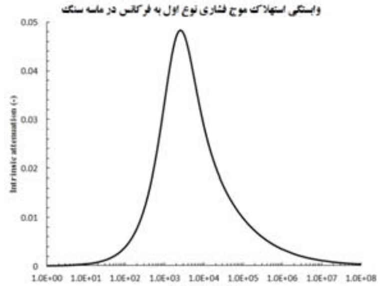
فرکانس بشدت بر استهلاک ذاتی موج تاثیرگذار است. توجه شود که این استهلاک ناشی از حرکت نسبی فازهای سیال و جامد است.

استهلاک موج فشاری نوع اول به تدریج با افرایش فرکانس، زیاد می‌شود. سپس، در اطراف فرکانس تبدیل به حداکثر مقدار خود می‌رسد و در نهایت مقدار آن شروع به کاهش یافتن می کند.

استهلاک ذاتی موج نوع اول در ماسه بمراتب از ماسه سنگ بزرگتر است.



وابستگی استهلاک موج فشاری نوع اول به فرکانس در ماسه سنگ

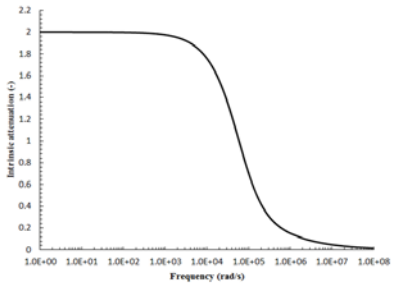


شکل ۲-۱۰ وابستگی استهلاک موج فشاری نوع اول به فرکانس در ماسه

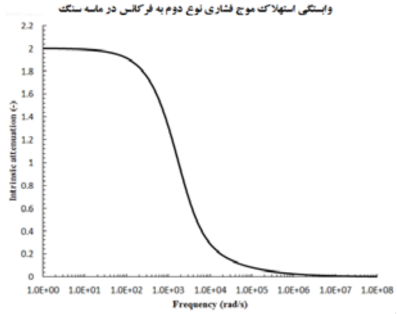
hasemzadeh 24

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

• استهلاک ذاتی موج فشاری نوع دوم:



وابستگی استهلاک موج فشاری نوع دوم به فرکانس در ماسه سنگ



وابستگی استهلاک موج فشاری نوع دوم به فرکانس در ماسه

بیشترین مقدار استهلاک موج فشاری نوع دوم در محدوده فرکانس پایین رخ می‌دهد.

با فزایش فرکانس، استهلاک این نوع موج کاهش می‌یابد.

علت عمده بالا بودن استهلاک آن غیرهم فاز بودن قسمت‌های سیال و جامد است.

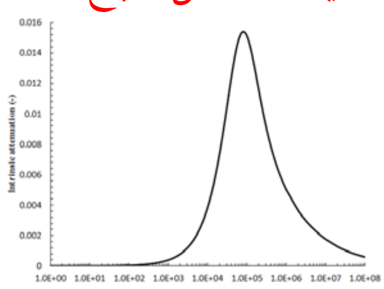
in a saturated porous medium two compressive waves can be generated,

1- the particles and the fluid move together
2- they move in opposite directions.

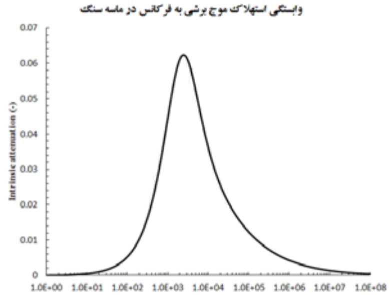
The second wave is strongly damped, because of the friction between the soil particles and the fluid in the small pores.

انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

• استهلاک ذاتی موج برشی:



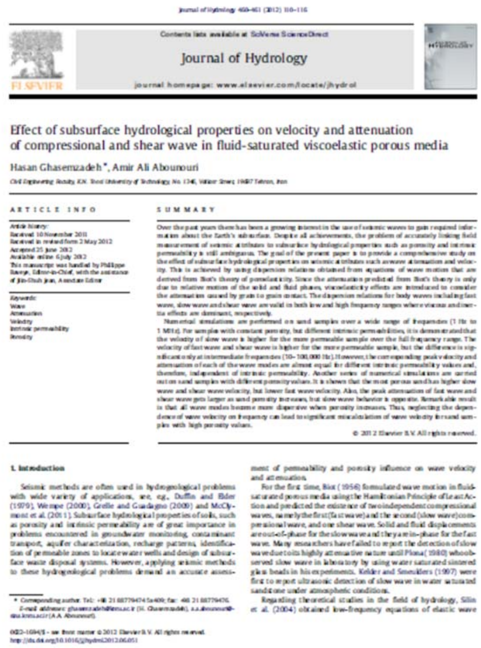
وابستگی استهلاک موج برشی به فرکانس در ماسه سنگ



وابستگی استهلاک موج برشی به فرکانس در ماسه

رفتار استهلاکی موج برشی مشابه با موج فشاری نوع اول می‌باشد. استهلاک موج برشی نیز در ماسه بزرگتر از ماسه سنگ است.

Ghasemzadeh H., Abounouri A.A., 2012, *Effect of subsurface hydrological properties on velocity and attenuation of compressional and shear wave in fluid-saturated viscoelastic porous media*, Journal of Hydrology, 460-461 (2012) 110-116.

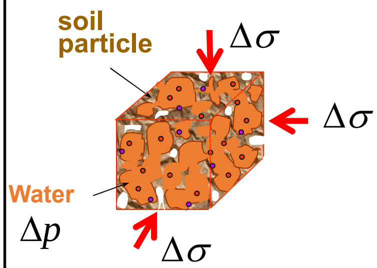


Dr. Has

حل معادله موج در محیط اشباع
با فرضیات ساده کننده

Dr. Hasan Ghasemzadeh 28

Undrained compression of a porous medium



$$\Delta V_f = -nC_f \Delta p V$$

$$\Delta V_s = -(1-n)C_s \Delta p V$$

C_f compressibility of the pore fluid

C_s compressibility of the solid

v fluid velocity

w Solid velocity

$$\sigma = \sigma' + \alpha p$$

$$\sigma' = \frac{-1}{C_m}\varepsilon$$

$$d\varepsilon = -C_m d\sigma'$$

α Biot's coefficient

C_m compressibility of the porous medium

$S_p = nC_f + (\alpha - n)C_s$ storativity

$\rho = n\rho_f + (1-n)\rho_s$ total density

Dr. Hasan Ghasemzadeh 29

معادلات خاک اشباع

System of Equation

basic equations for the propagation of plane waves in a porous medium

total mass conservation

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + S_p \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial (n(v-w))}{\partial x}$$

total momentum

$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$$

momentum of the pore fluid

$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \tau n \rho_f \frac{\partial (v-w)}{\partial t} = -n\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa}(v-w)$$

generalization of Darcy's law

stress-strain relation of the soil skeleton

$$m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

30

Dr. Hasan Ghasemzadeh

Special case: Undrained waves

permeability is very small: fluid and the solids move together $v = w$

System of Equation

$$p = -\frac{\alpha m_v}{\alpha^2 m_v + S_p}\sigma$$

$$\sigma' = -\frac{S_p}{\alpha^2 m_v + S_p}\sigma$$

soft saturated soil $C_f, C_s \Rightarrow S_p << m_v, \alpha = 1$

$$(K_u + \tfrac{4}{3}G)\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

undrained compression modulus

$$K_u = K + \frac{\alpha^2}{S_p} = K + \frac{\alpha^2}{nC_f + (\alpha - n)C_s}$$

K: compression modulus of the dry soil

Dr. Hasan Ghasemzadeh

31

Special case: Undrained waves

$$\sigma - \frac{K_u + \tfrac{4}{3}G}{c}\omega = f_1(x + ct)$$

$$\sigma + \frac{K_u + \tfrac{4}{3}G}{c}\omega = f_2(x - ct)$$

wave velocity c

$$c = \sqrt{\frac{K_u + \tfrac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho m_v} + \frac{\alpha^2}{\rho(nC_f + (\alpha - n)C_s)}}$$

For a completely saturated soft soil

$$K_u + \tfrac{4}{3}G \approx \frac{1}{n}C_f$$

$$C_f = 0.5 \times 10^{-9}\, m^2/N$$

$$n = 0.4, \rho = 2000\, kg/m^3 \qquad \Rightarrow c = 1600\, m/s$$

32

Dr. Hasan Ghasemzadeh

Special case: Rigid solid matrix

very stiff porous rock $w = 0$

disregard the stress-strain relation and the momentum balance of the solid matrix

System of Equation

$$n\frac{\partial v}{\partial x} = S_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$(1+\tau)\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n\mu}{\kappa} v$$

Response: harmonic waves

$$p(x,t) = P\ e^{i(\lambda(x-ct))}$$

$$v(x,t) = V\ e^{i(\lambda(x-ct))}$$

λ wave number $\lambda = \omega / c$ may be complex

ω frequency of the wave is real

Substitution and combination $\frac{(1+\tau)\rho_f S_p}{n}\left[1 + i\frac{n\mu}{(1+\tau)\rho_f \omega\kappa}\right] c^2 = 1$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 33

Special case: Rigid solid matrix

Definition

$$B = \frac{n\mu}{(1+\tau)\rho_f \omega\kappa} = \frac{ng}{(1+\tau)\omega k} \qquad k = \frac{\kappa\rho_f g}{\mu}$$

κ Intrinsic permeability of the porous medium m^2

k hydraulic conductivity of the porous medium m/s

A- For normal soil or rock $k = 10^{-4}\ cm/s$ Imaginary part dominates so

$$\Rightarrow c^2 = -i\frac{\omega\kappa}{\mu S_p} \qquad \lambda = \omega/c = -(1+i)\sqrt{\frac{S_p \omega \rho_f g}{2k}}$$

B- For extremely high frequencies

Real part dominates so $c^2 = \frac{n}{(1+\tau)\rho_f S_p} = \frac{1}{(1+\tau)\rho_f C_f}$

waves of this type will be strongly damped by the friction with the solids

Dr. Hasan Ghasemzadeh 34

Special case: Rigid solid matrix

Example A- A soil completely saturated with water

$$\omega = 1\,s^{-1}$$
$$k = 10^{-4}\,cm/s$$
$$n = 0.4$$
$$S_p = nC_f = 0.2\times10^{-9}\,m^2/N$$

$$\lambda = -(1+i)\sqrt{\frac{S_p\omega\rho_f g}{2k}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda) = 1\,m^{-1}$$

the wave will be damped in the immediate vicinity of the source

Example B- A soil completely saturated with water

$$C_f = 0.5\times10^{-9}\,m^2/N$$
$$\rho_f = 1000\,kg/m^3$$
$$\tau = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{(1+\tau)\rho_f C_f}} = 1400\,m/s$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

35

گسترش موج در لایه خاک اشباع

System of Equation

total mass conservation

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial x} + S_p\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(n(v-w))}{\partial x}$$

total momentum

$$n\rho_f\frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial\sigma'}{\partial x} - \alpha\frac{\partial p}{\partial x}$$

momentum of the pore fluid

generalization of Darcy's law

$$n\rho_f\frac{\partial v}{\partial t} + \tau n\rho_f\frac{\partial(v-w)}{\partial t} = -n\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2\mu}{\kappa}(v-w)$$

stress-strain relation of the soil skeleton

$$m_v\frac{\partial\sigma'}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

36

گسترش موج در لایه خاک اشباع

حل تحلیلی

general periodic pore pressure at the free end of a very long column

فرض جواب

$$p(x,t) = P\, e^{i(\lambda x + \omega t)}$$
$$\sigma'(x,t) = S\, e^{i(\lambda x + \omega t)}$$
$$v(x,t) = V\, e^{i(\lambda x + \omega t)}$$
$$w(x,t) = W\, e^{i(\lambda x + \omega t)}$$

ω given frequency

λ Unknownwave number
Maybe complex number

Substitution

$$n\lambda V + (\alpha - n)\lambda W = S_p \omega P$$
$$m_v \omega S = -\lambda W$$
$$n\rho_f \omega V + (1-n)\rho_s \omega W = -\lambda S - \alpha\lambda P$$
$$(1+\tau)n\rho_f \omega V - \tau n \rho_f \omega W = -n\lambda P + \frac{in^2\mu}{\kappa}(V - W)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 37

گسترش موج در لایه خاک اشباع

Dimensionless parameters

$$d_f = \rho_f/\rho,$$
$$d_s = \rho_s/\rho,$$
$$a = \frac{n\mu}{\kappa\rho_f\omega} = \frac{ng}{k\omega},$$
$$b = S_p/m_v,$$
$$\lambda^2 = \rho m_v \omega^2 \gamma^2.$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho m_v},$$
$$\gamma = \frac{c\lambda}{\omega}$$

The homogeneous system of equations has a non-zero solution only if

$$A(\gamma)^4 + B(\gamma)^2 + C = 0$$

$$A = n,$$
$$B = -n(1-n)d_s - [(\alpha-n)^2 + \alpha^2\tau]d_f - (1+\tau)d_f b + iad_f(\alpha^2 + b),$$
$$C = [(1-n)d_s + \tau]d_f b - iad_f b.$$

$$\lambda_1 = \pm(q_1 + ir_1)(\omega/c) \qquad \lambda_2 = \pm(q_2 + ir_2)(\omega/c)$$

38

Dr. Hasan Ghasemzadeh

گسترش موج در لایه خاک اشباع

جواب

$$p = A_p \exp[-(\omega/c)(r_1 - iq_1)x]\exp(i\omega t) + B_p \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x]\exp(i\omega t),$$

$$w = A_w \exp[-(\omega/c)(r_1 + iq_1)x]\exp(i\omega t) + B_w \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x]\exp(i\omega t),$$

$$\sigma' = A_s \exp[-(\omega/c)(r_1 - iq_1)x]\exp(i\omega t) + B_s \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x]\exp(i\omega t),$$

$$v = A_v \exp[-(\omega/c)(r_1 - iq_1)x]\exp(i\omega t) + B_v \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x]\exp(i\omega t).$$

کاهندگی با فاصله

$$\frac{A_v}{A_w} = -\frac{\alpha - n}{n} - \frac{(1-\alpha d_f - \gamma_1^2)b}{n(d_f b - \alpha\gamma_1^2)}, \qquad \frac{A_w}{A_p} = \frac{(d_f b - \alpha\gamma_1^2)cm_v}{(1-\alpha d_f - \gamma_1^2)\gamma_1}, \qquad \frac{A_s}{A_w} = -\frac{\gamma_1}{cm_v},$$

$$\frac{B_v}{B_w} = -\frac{\alpha - n}{n} - \frac{(1-\alpha d_f - \gamma_2^2)b}{n(d_f b - \alpha\gamma_2^2)}. \qquad \frac{B_w}{B_p} = \frac{(d_f b - \alpha\gamma_2^2)cm_v}{(1-\alpha d_f - \gamma_2^2)\gamma_2}. \qquad \frac{B_s}{B_w} = -\frac{\gamma_2}{cm_v},$$

boundary conditions

$$x = 0 \ : \ \sigma' = (1-\alpha)p_0 \exp(i\omega t), \qquad \frac{A_p}{p_0} = \frac{[d_f b - \gamma_2^2 + (1-\alpha)(1-\alpha d_f)](1-\alpha d_f - \gamma_1^2)}{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\alpha - \alpha^2 d_f - b d_f)},$$

$$x = 0 \ : \ p = p_0 \exp(i\omega t). \qquad \frac{B_p}{p_0} = -\frac{[d_f b - \gamma_1^2 + (1-\alpha)(a-\alpha d_f)](1-\alpha d_f - \gamma_2^2)}{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\alpha - \alpha^2 d_f - b d_f)}.$$

39

Dr. Hasan Ghasemzadeh

گسترش موج در لایه خاک اشباع

جواب

Approximation of the solution

For real soils $k\omega$ often very small and $a = \dfrac{ng}{k\omega}$ will be very large

A, B and C may be approximated by

$$A = n \qquad B = iad_f(\alpha^2 + b) \qquad C = iad_f b$$

Possible solution for $x \geq 0$

$$\Rightarrow \gamma_1 = -\sqrt{\frac{b}{a^2 + b}} \quad , \gamma_2 = -(1-i)\sqrt{\frac{c^2}{2c_v\omega}}$$

one-dimensional consolidation coefficient of the porous medium $c_v = \dfrac{k}{\rho_f g(\alpha^2 m_v + S_p)}$

wave is noticeable only for a distance $L = 4\sqrt{2c_v/\omega}$

40

Dr. Hasan Ghasemzadeh

گسترش موج در لایه خاک اشباع

جواب

$$c_2 = \left[\frac{1-\alpha+S_p/m_v}{\alpha-n+\tau+(1+\tau)S_p/m_v}\right]\frac{n}{S_p\rho_f}$$

Approximation of velocity

if $\alpha=1,\ \tau=0,\ S_p=nC_f$

$$c_2 = \left[\frac{nC_f/m_v}{1-n+nC_f/m_v}\right]\frac{1}{C_f\rho_f}$$

Two wave:

$$\gamma=\gamma_1 \qquad \frac{v}{w}\approx 1$$

$$\gamma=\gamma_2 \qquad \frac{v}{w}\approx -\left[\frac{\alpha-n}{\alpha}+\frac{S_p}{\alpha n m_v}\right]$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

41

گسترش موج در لایه خاک اشباع

Example: soil properties

Symbol	Property	Value
ρ_s	Density of solids (kg/m^3)	2650
ρ_f	Density of fluid (kg/m^3)	1000
k	Permeability (m/s)	0.001
n	Porosity (-)	0.400
τ	Tortuosity (-)	0.000
α	Biot coefficient (-)	1.000
m_v	Compressibility of soil (m^2/MN)	0.0002
C_f	Compressibility of fluid (m^2/MN)	0.0005
C_s	Compressibility of solids (m^2/MN)	0.000
ω	Frequency (1/s)	10

Exact solution

$$\gamma_1 = -0.707106781+0.000000004i \ :\ A_v/A_w = 0.999999981-0.000012500i,$$

$$\gamma_2 = -22.439191923+22.394414404i \ :\ B_v/B_w = -4.000000019-0.000012500i.$$

approximate solution

$$\gamma_1 = -0.7071068 \ :\ A_v/A_w = 1,$$

$$\gamma_2 =: -22.416793+22.416793i \ :\ B_v/B_w = -4.$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

42