

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد سیرجان

دانشگاه فنی مهندسی، گروه مهندسی عمران
رساله برای دریافت درجه دکتری تخصصی Ph.D
رشته مهندسی عمران، گرایش: سازه

عنوان:

ترکیب روش عددی منیفلد و روش اجزای مرزی برای حل مسائل الاستواستاتیک

اساتید راهنما:

دکتر صالح حمزه ی جواران
دکتر حسن قاسم زاده

استاد مشاور:

دکتر علی کاربخش راوری

نگارش:

حسن دهقان زاده نجم آباد

زمستان ۱۴۰۰



معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

بیایری از خداوند بجهان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و بهاره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضا هیئت علمی و احدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تحفظ نکنیم:

۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.

۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران، پژوهشگران (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بکاران پژوهش.

۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تعد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹- اصل برانست: التزام به برانست جویی از هرگونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به ثواب های غیر علمی می آلاینند.

نام و نام خانوادگی: حسن و همتان زاده نجم آباد

تاریخ و امضاء



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد سیرجان

دانشگاه فنی مهندسی، گروه مهندسی عمران

رساله برای دریافت درجه دکتری تخصصی Ph.D

عنوان:

ترکیب روش عددی منیفلد و روش اجزای مرزی برای حل مسائل الاستواستاتیک

هیات داوران :

۱-استاد راهنمای اول : دکتر صالح حمزه جواران	امضاء	تاریخ
۲-استاد راهنمای دوم : دکتر حسن قاسم زاده	امضاء	تاریخ
۳-استاد مشاور : دکتر علی کاربخش راوری	امضاء	تاریخ
۴-استاد داور داخلی : دکتر محسن محمدی زاده	امضاء	تاریخ
۵-استاد داور داخلی : دکتر محسن ملکی نژاد	امضاء	تاریخ
۶-استاد داور خارجی : دکتر امیر احمد هدایت	امضاء	تاریخ
۷-استاد داور خارجی : دکتر سعید پرهوده	امضاء	تاریخ
۸-استاد ناظر : دکتر رضا نورمندی پور	امضاء	تاریخ

نگارش:

حسن دهقان زاده نجم آباد

زمستان ۱۴۰۰

تقدیم بہ

«این مجموعه را با کمال افتخار و احترام تقدیم می کنم به:

روح بلند امام راحل و دو یادگارش و یار ہم نشینش حضرت آیت الله ہاشمی رفسنجانی.

آنان کہ عاشقانہ خدمت کردند تا کہ ما بخش وجود ما و روشنگر راہمان باشند...

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمہ اشار.

به پاس عاطفہ سرشار و کرمای امید بخش وجودشان کہ در این سردترین روزگار ان بہترین پشتیبان ماست.

به پاس قلب بزرگشان، و به پاس محبت های بی دریغشان کہ ہرگز فروکش نمی کند»

و تقدیم بہ

ہمسرم، دو فرزندم و پدر و مادر عزیزم

پاسکزاری

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش فرید نعمت.

شکر و سپاس خدایی را که قلم را آفرید. بدون شک، این رساله حاصل راهنمایی‌های اساتید کراتقدری است که افتخار شاگردی آنان را داشته‌ام. خداوند بزرگ را بر این سعادت شاکرم و سپاس و قدردانی خود را به این سروران ابراز می‌دارم. بر خود لازم میدانم از زحمات اساتید کراتقدر، جناب آقای دکتر صالح حمزه جواران، جناب آقای دکتر حسن قاسم زاده و جناب آقای دکتر علی کارنخش که در طول انجام این رساله زحمات زیادی کشیده‌اند، قدردانی کرده و از خداوند متعال برای آن دو عزیز سربلندی و سعادت آرزو کنم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر صالح حمزه جواران و جناب آقای دکتر حسن قاسم زاده که متن اولیه را با دقت مطالعه کرده و پیشنهادهای خوبی ارائه نمودند، صمیمانه قدردانی می‌کنم.

در پایان لازم است از زحمات بیش‌بهره و مادر کراتقدرم، به‌سز عزیزم قدردانی و تشکر نمایم که در طول تحصیلاتم از تشویق‌های معنوی و مادی ایشان بهره‌مند شده‌ام.

فهرست مطالب

<u>عنوان</u>	<u>صفحه</u>
چکیده.....	م
فصل اول : مقدمه و کلیات رساله	
۱-۱ مقدمه.....	۲
۲-۱ بیان مساله.....	۲
۱-۲-۱ روش المان محدود.....	۴
۲-۲-۱ روش المان مرزی.....	۶
۳-۲-۱ روش تفاضل محدود.....	۸
۴-۲-۱ روش‌های بدون شبکه.....	۸
۵-۲-۱ روش نقاط محدود.....	۹
۶-۲-۱ روش عددی منیفلد.....	۱۰
۱-۶-۲-۱ انتخاب پوشش ها.....	۱۱
۲-۶-۲-۱ معادله تعادل و اعمال شرایط مرزی.....	۱۲
۳-۶-۲-۱ تقریب درجه بالا و مشکل وابستگی خطی.....	۱۳
۳-۱ روش‌های ترکیب عددی.....	۱۴
۱-۳-۱ ترکیب روش عددی المان مرزی و روش منیفلد برای حل مسائل پتانسیل.....	۱۵
۴-۱ ضرورت انجام رساله.....	۱۶
۵-۱ اهداف رساله.....	۱۷
۶-۱ سوالات رساله.....	۱۸
۷-۱ فرضیه و پیش فرض های رساله.....	۱۸
۸-۱ نوآوری رساله.....	۱۹
۹-۱ ساختار پایان نامه.....	۱۹
۱۰-۱ مدل مفهومی رساله.....	۲۰
فصل دوم : مکانیک جامدات و مروری بر المان مرزی	
۱-۲ مقدمه.....	۲۲
۲-۲ مقدمه‌ای بر مسائل الاستیسیته.....	۲۲
۱-۲-۲ مسائل تنش مسطح (Plane Stress).....	۲۴
۲-۲-۲ کرنش مسطح (Plane Strain).....	۲۶
۳-۲ مقایسه روش اجزای مرزی.....	۲۸

۲۸.....	۲-۳-۱ گسسته سازی اجزای محدود و اجزای مرزی
۲۹.....	۲-۴ روش اجزای مرزی
۳۳.....	۲-۵ روش المان مرزی برای مسائل دو بعدی الاستیسیته
۳۳.....	۲-۶ معادلات صفحه‌ای الاستیسیته
۳۳.....	۲-۶-۱ کرنش مسطح
۳۴.....	۲-۶-۱-۱ روابط کینماتیک
۳۴.....	۲-۶-۱-۲ معادلات پیوستگی
۳۷.....	۲-۶-۱-۳ معادلات تعادل
۳۸.....	۲-۶-۱-۴ شرایط مرزی
۴۰.....	۲-۶-۱-۵ تنش و کرنش اولیه
۴۱.....	۲-۶-۲ تنش مسطح
۴۳.....	۲-۷ روابط بازگشتی بتی
۴۴.....	۲-۸ جواب اساسی
۴۹.....	۲-۹ بررسی برنامه اجزای مرزی

فصل سوم : مروری بر روش عددی منیفلد

۵۲.....	۳-۱ روش عددی منیفلد (NMM)
۵۳.....	۳-۲ مفاهیم اولیه
۵۵.....	۳-۳ تفسیر هندسی روش منیفلد
۵۹.....	۳-۴ تقریب جابجایی
۶۰.....	۳-۵ توابع وزن
۶۲.....	۳-۶ توابع جابجایی محلی
۶۳.....	۳-۷ تابع جابجایی محلی ثابت (منیفلد معمولی)
۶۳.....	۳-۸ تابع جابجایی محلی خطی
۶۴.....	۳-۹ تابع جابجایی محلی درجه بالا
۶۵.....	۳-۱۰ روابط تعادل برای منیفلد درجه دو
۶۶.....	۳-۱۱ ماتریس سختی
۶۶.....	۳-۱۲ ماتریس تنش اولیه
۶۷.....	۳-۱۳ ماتریس بار متمرکز
۶۸.....	۳-۱۴ ماتریس بار حجمی
۶۸.....	۳-۱۵ ماتریس نقاط گیردار
۶۹.....	۳-۱۶ معادله حرکت و شرایط مرزی

۷۳.....	۱۷-۳ وابستگی خطی
۷۴.....	۱-۱۷-۳ روش تقریب جابجایی محلی سه گانه برای حذف وابستگی خطی
۷۸.....	۱۸-۳ انتگرالگیری سیمپلکس
۸۱.....	۱۹-۳ جمع بندی

فصل چهارم : روش انجام رساله

۸۴.....	۱-۴ ترکیب روش های عددی
۸۵.....	۱-۱-۴ روش مستقیم
۸۶.....	۱-۱-۱-۴ شرایط موجود در مرز مشترک
۸۷.....	۲-۱-۱-۴ رابطه بین بارهای گرهی و نیروهای کششی (ترکشن)
۸۸.....	۳-۱-۱-۴ ایجاد ماتریس سختی معادل المان مرزی
۹۰.....	۴-۱-۱-۴ تبدیل نیروهای المان محدود به کنش سطحی
۹۱.....	۲-۱-۴ روش تکرار
۹۳.....	۲-۴ حالات مختلف در روش تکرار

فصل پنجم : نتایج عددی

۹۹.....	۱-۵ نتایج عددی
---------	----------------

فصل ششم : نتیجه گیری و پیشنهادات

۱۲۰.....	۱-۶ مقدمه
۱۲۰.....	۲-۶ نتیجه گیری
۱۲۱.....	۳-۶ پیشنهادات
۱۲۲.....	منابع
۱۲۳.....	منابع فارسی
۱۲۴.....	منابع لاتین
۱۳۰.....	Abstract

فهرست شکل ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱ گام های مدل سازی عددی	۳
شکل ۲-۱ نحوه گسسته سازی روش اجزای محدود	۵
شکل ۳-۱ حوزه حل، پوششی ریاضی، پوشش فیزیکی و المان مانیفولد	۱۶
شکل ۴-۱ مدل مفهومی رساله	۲۰
شکل ۱-۲ تنش های نرمال و برشی در یک المان	۲۳
شکل ۲-۲ کرنش ها در یک المان مسطح	۲۳
شکل ۳-۲ نمونه ای از مسئله تنش مسطح	۲۶
شکل ۴-۲ نمونه ای از مسئله کرنش مسطح	۲۷
شکل ۵-۲ ماتریس های ایجاد شده در روش های اجزای محدود (أ) و اجزای مرزی (ب)	۲۹
شکل ۶-۲ معادله اساسی در روش اجزای مرزی	۳۱
شکل ۷-۲ شرایط جواب اساسی در روش اجزای مرزی	۳۱
شکل ۸-۲ تابع دلتای دیراک	۳۲
شکل ۹-۲ مقطع طولی سطح تحت کرنش مسطح	۳۴
شکل ۱۰-۲ شرایط تکیه گاه و بارگذاری مرز یک محیط مستطیل	۳۹
شکل ۱۱-۲ صفحه ی لاغر الاستیک	۴۱
شکل ۱۲-۲ بار متمرکز F در نقطه Q ارائه شده است.	۴۵
شکل ۱۳-۲ فلوچارت برنامه اجزای مرزی	۴۹
شکل ۱-۳ مفهوم منیفلد	۵۴
شکل ۲-۳ انطباق خوب المان های ساده	۵۴
شکل ۳-۳ المان بندی مثلثی در روش أ: منیفلد ب: اجزا محدود	۵۵
شکل ۴-۳ انواع پوشش ها و عدم الزام به انطباق پوششها با مرز فیزیکی	۵۶
شکل ۵-۳ دامنه فیزیکی مسئله و پوشش های ریاضیاتی	۵۷
شکل ۶-۳ پوشش های فیزیکی حاصل از روی هم گذاری پوشش ریاضیاتی و دامنه فیزیکی مسئله.	۵۸
شکل ۷-۳ المان های منیفلد حاصل از پوشش های فیزیکی	۵۸
شکل ۸-۳ المان مثلثی در أ: اجزا محدود، ب: منیفلد	۵۹
شکل ۹-۳ تابع وزن در یک پوشش شش ضلعی	۶۰

- شکل ۳-۱۰ توابع جابجایی هر پوشش در المان مثلثی ۶۱
- شکل ۳-۱۱ شرایط مرزی ۷۰
- شکل ۳-۱۲ المان منیفلد مثلثی و پوشش های مربوطه. ۷۵
- شکل ۳-۱۳ مرز فیزیکی مسئله، پوشش ها و المان های منیفلد. ۷۸
- شکل ۳-۱۴ دامنه مؤثر برای انتگرالگیری در روش سیمپلکس ۷۹
- شکل ۳-۱۵ سیمپلکس در ا: یک بعد، ب: دو بعد، ج: سه بعد ۷۹
- شکل ۳-۱۶ انتقال سیمپلکس درجه دو ۸۰
- شکل ۳-۱۷ تقسیم چندضلعی به تعدادی سیمپلکس جهت دار ۸۱
- شکل ۴-۱ فلوچارت روش تکرار برای حل دستگاه معادلات سیستم ۸۵
- شکل ۴-۲ المان بندی ترکیب شد مربوط به روش های المان محدود و المان مرزی ۸۶
- شکل ۴-۳ گسسته سازی روش متوالی ۹۴
- شکل ۴-۴ روش حل معادلات به صورت همزمان ۹۵
- شکل ۴-۵ چارت مراحل انجام رساله ۹۷
- شکل ۵-۱ مدل تیر دو سر ساده ۱۰۰
- شکل ۵-۲ مدل المان بندی مدل اول (ناحیه باندری با ۶ المان و ناحیه منیفلد با ۸ المان) ۱۰۰
- شکل ۵-۳ مدل المان بندی مدل دوم (ناحیه باندری با ۶ المان و ناحیه منیفلد با ۴ المان) ۱۰۰
- شکل ۵-۴ نتایج تحلیل جابجائی خیز قائم، ا: مدل اول، ب: مدل دوم، ج: مدل اول و دوم ۱۰۱
- شکل ۵-۵ مدل تیر کنسول ۱۰۳
- شکل ۵-۶ المان بندی مدل اول و دوم (ناحیه باندری با ۶ المان و ناحیه منیفلد با ۸ المان درجه ۲ و ۳) ۱۰۳
- شکل ۵-۷ المان بندی مدل سوم (ناحیه باندری با ۶ المان و ناحیه منیفلد با ۴ المان درجه ۴) ۱۰۳
- شکل ۵-۸ المان بندی مدل چهارم (ناحیه باندری با ۶ المان و ناحیه اجزای محدود با دو المان ۹ گرهی) ۱۰۴
- شکل ۵-۹ نتایج تحلیل خیز قائم نوک تیر ۱۰۵
- شکل ۵-۱۰ مدل مخزن استوانه ای ۱۰۶
- شکل ۵-۱۱ مدل المان بندی اول (ناحیه باندری با ۶ المان و ناحیه منیفلد با ۸ المان درجه ۲ نامتقارن) ۱۰۷
- شکل ۵-۱۲ مدل المان بندی دوم (ناحیه باندری با ۶ المان و ناحیه منیفلد با ۸ المان درجه ۲ متقارن) ۱۰۷
- شکل ۵-۱۳ نتایج تحلیل جابجائی پوسته ها، ا: مدل اول، ب: مدل دوم ۱۰۸
- شکل ۵-۱۴ نتایج تحلیل تنش در راستای افقی ($\sigma=0\theta$) ۱۰۸

- شکل ۵-۱۵ مدل ورق با سوراخ در وسط ۱۱۱
- شکل ۵-۱۶ مدل المان بندی ۱۱۱
- شکل ۵-۱۷ تنش نرمال لبه افقی (σ_X) ۱۱۲
- شکل ۵-۱۸ تنش نرمال لبه قائم (σ_Y) ۱۱۲
- شکل ۵-۱۹ نمایش مدل، أ: مدل اول، ب: مدل دوم ۱۱۴
- شکل ۵-۲۰ جابجائی افقی و قائم سد ۱۱۵

فهرست جداول

عنوان	صفحه
جدول ۱-۵ نتایج تحلیل جانمایی خیز قائم وسط تیر ساده با روش منیفلد برای مدل اصلی و روش ترکیب برای مدل اول و دوم.....	۱۰۲
جدول ۲-۵ نتایج تحلیل جانمایی خیز قائم وسط تیر کنسول با روش منیفلد برای مدل اصلی و روش ترکیب برای مدل اول، دوم، سوم و چهارم.....	۱۰۶
جدول ۳-۵ نتایج تحلیلی جانمایی شعاعی پوسته ها مدل اول و دوم.....	۱۰۹
جدول ۴-۵ نتایج تحلیل تنش نرمال در جهت X.....	۱۱۰
جدول ۵-۵ نتایج تحلیل تنش نرمال لبه افقی (σ_{yy}) و لبه قائم (σ_{xx}).....	۱۱۳
جدول ۶-۵ نتایج تحلیل جانمایی افقی و عمودی گره های بدنه سد و فنداسیون.....	۱۱۵

چکیده

امروزه روشهای عددی منیفلد و اجزای مرزی در مهندسی به خوبی استفاده می شود با این وجود هر یک از این روشها دارای نقاط ضعف و قوت خاص خود هستند. روش منیفلد با تعداد المانهای کم، قادر به تعیین پاسخ مسایل با دامنه محدود است. روش اجزای مرزی قادر به تعیین جوابهای مسایل نیمه بی نهایت با دقت مناسب است. در این رساله برای اولین بار ترکیب دو روش عددی اجزای مرزی و روش عددی منیفلد برای مسایل الاستواستاتیک ارائه می شود. هدف بهره مندی از مزایای هر دو روش است. در این روش مسئله به دو ناحیه تقسیم می شود و هر ناحیه بصورت مجزا تحلیل شده و نهایتاً در فصل مشترک دو ناحیه دو شرط اساسی تعادل و پیوستگی به روش تکرار کنترل می گردد. این روش برای محاسبه جابجایی و تنش حاصل از اعمال بارهای استاتیکی در ۵ مسئله مختلف مورد بررسی قرار گرفت. در روش منیفلد از المان مثلثی درجه ۲ و ۳ و ۴ و در روش اجزای مرزی از المان درجه ۲ استفاده گردید مقایسه نتایج عددی این روش نشان می دهد که روش فوق بسیار کارآمد و دقیق می باشد.

کلیدواژه ها: ترکیب روش های عددی، مسائل الاستواستاتیک، روش اجزای مرزی، روش منیفلد، الگوریتم تکرار

فصل اول : مقدمه و کلیات رساله

۱-۱ مقدمه

به طور کلی برای بررسی و تحلیل پدیده های طبیعی، مدل سازی پدیده روش قابل قبولی برای ارزیابی و بررسی عملکرد تحت شرایط مدنظر بوده است، در یک تقسیم بندی کلی روش های مدل سازی را میتوان به دو دسته اصلی تفکیک نمود:

مدل سازی فیزیکی

مدل سازی عددی

در روش اول با توجه به خصوصیات پدیده مدنظر مدل فیزیکی پدیده در مقیاس های کوچکتر از واقعیت و با در نظر گرفتن ساده سازی هایی ایجاد شده و تحت شرایط مختلف آزمایش های متنوعی طراحی و اجرا میگردد و در نهایت عملکرد و تحلیل پدیده مدنظر مورد ارزیابی قرار میگیرد.

در روش دوم با بررسی پدیده، در گام اول مدل ریاضی آن ایجاد میگردد. در این مرحله معادلات حاکم بر پدیده، شرایط اولیه، شرایط مرزی و خصوصیات تاثیرگذار بر آن استخراج و معادلات بدست آمده بر اساس روش های مختلف عددی حل میگردد و در نهایت عملکرد و تحلیل پدیده مدنظر بر اساس معادلات ایجاد شده که در مرحله قبل حل گردید مورد ارزیابی قرار میگیرد.

در این رساله سعی بر آن است تا با بکارگیری تواما دو روش عددی المان مرزی و روش عددی منیفولد مسائل حوزه الاستیک خطی مورد بررسی قرار گیرد و در نهایت روشی نوین برای حل این دسته از مسائل با ترکیب دو روش مذکور ارائه گردد.

در این فصل ابتدا کلیت مساله رساله تعریف شده است، بعد از آن در مورد ضرورت انجام رساله و همچنین اهداف و سوالات رساله و فرضیه های رساله مطالبی ذکر شده است. و در پایان روش انجام رساله و جمع بندی فصل ارائه گردیده است.

۱-۲ بیان مساله

پدیده هایی که در طبیعت وجود دارند از قبیل مسائل فیزیکی، مکانیکی، الکتریکی و یا بیولوژیکی می توانند بوسیله معادلات جبری یا دیفرانسیلی یا انتگرالی بیان شوند. به دست آوردن جواب های دقیق برای این گونه معادلات ایده آل می باشد. اما پاسخ دقیق فقط برای تعداد اندکی از این معادلات در دسترس می باشد، چراکه بیشتر این معادلات پیچیده می باشند. بنابراین استفاده از روش های عددی برای به دست آوردن جواب تقریبی این معادلات اجتناب ناپذیر می باشد.

عمدتا رویه شبیه سازی پدیده های مختلف مراحل مشخصی را طی نموده، این مراحل به شرح ذیل میباشد: با توجه به مشاهدات فیزیکی پدیده مدنظر، مدل ریاضی ساده سازی شده پدیده ایجاد میگردد.

مدل ریاضی ایجاد شده به صورت معادلات حاکم بر پدیده بوده است، که علاوه بر معادلات، شرایط مرزی مختلف و همچنین شرایط اولیه با توجه به پدیده مدنظر تعیین میگردد.

در این مرحله معادلات ایجاد شده برای حل باید به مولفه های جداسازی شده (تفکیک شده) تقسیم گردد، این تقسیم بندی بر اساس هندسه حوزه مساله ایجاد میگردد.

در مرحله بعد الگوریتم ریاضی حل عددی معادلات حاکم بر پدیده تعیین میگردد. با توجه به روشهای مختلف حل عددی معادلات حاکم بر پدیده، در این مرحله یک روش عددی که با شرایط مساله متناسب بوده است انتخاب میگردد.

پس از ایجاد روابط حاکم و تعیین روش حل عددی، با استفاده از کدنویسی (بیان روابط و معادلات و شرایط حل مساله به زبان ماشین) و به کارگیری روابط ایجاد شده، معادلات و شرایط پیچیده بر مساله مدنظر با استفاده از کامپیوتر بیان میگردد.

در مرحله آخر معادلات و روابط حاکم توسط سیستم های کامپیوتری مناسب حل گردیده و شبیه سازی پدیده مدنظر انجام میگردد.

در فلوچارت شکل (۱-۱) مراحل مدلسازی عددی نمایش داده شده است.



شکل ۱-۱ گام های مدلسازی عددی

تا به امروز روش های عددی مختلفی جهت مدل سازی پدیده ها مورد استفاده قرار گرفته اند، روش های مختلف بر اساس ویژگی های ذاتی و تکنیک های بکارگیری دارای مزایا و معایب متفاوتی نسبت به یکدیگر بوده اند، که در ادامه مورد بررسی قرار گرفته اند.

روش المان محدود بخاطر داشتن تئوری قوی و پایداری زیاد در حل مسائل مختلف از اقبال بیشتری برخوردار می باشد. ایده اولیه این روش، جایگزین یک تابع تقریب منطقه ای به جای تابع جواب اصلی در هر المان است. اما تقسیم بندی کل دامنه به المان های به هم چسبیده یک فرآیند پیچیده و زمان بر خواهد بود. به این خاطر روش های عددی بدون شبکه^۱ کارایی خود را نشان می دهند. عدم نیاز این روش ها به مش بندی دامنه محاسباتی^۲ از خصوصیات این روش ها می باشد. در این روش ها، همانند روش المان محدود برای به دست آوردن ارتباط بین گره ها^۳ از توابع تقریب استفاده می شود. به این منظور برای تقریب از تعدادی توابع پایه^۴ بر اساس مقادیر دقیق گره ها استفاده می شود تا در نهایت تابع شکل تولید گردد.

برای ایجاد توابع شکل تکنیک های مختلفی وجود دارد که در حالت کلی به سه گروه تقسیم می شود:

RPIM^۵، MLS^۶ و PPI^۷ (گابتا و همکاران ۱۹۹۶) (بهرام پور و همکاران ۲۰۲۰) (حمزه ای و همکاران ۲۰۱۸)

هر کدام از این روش ها از توابع پایه خاصی استفاده می کنند. به عنوان مثال در روش RPIM توابع پایه شعاعی استفاده می شود. با استفاده از این توابع پایه و دنبال نمودن یک روند مشخص در هر گره، در نهایت توابع شکل تولید می گردد. توابع شکل ایجاد شده، متناسب با توابع پایه بکار رفته دارای خاصیت خاص خود می باشد. بعد از تشکیل توابع شکل، همانند روش المان محدود معادله دیفرانسیل مربوطه در کل دامنه مسئله حل می شود. در ادامه مختصری در مورد انواع روش های عددی توضیحات ارائه شده است.

۱-۲-۱ روش المان محدود

استفاده از روش اجزای محدود، توسط استادان هندسه صورت گرفته است. قریب به دو هزار سال قبل ریاضیدانان با مسائلی چون تعیین محیط و مساحت دایره دست به گریبان بودند. راه حل های دقیق تا پیش از کشف آنالیز ریاضی بدست نیامده بود. با وجود این، جواب هایی با دقت زیاد همانند شکل (۱-۲)، با استفاده

1-Meshless Methods

2-Domain- Type

3-Field Nodes

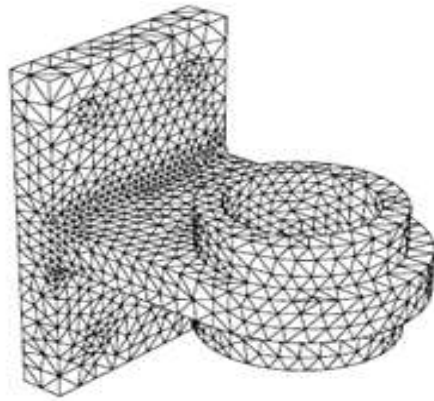
4-Monomial basis function

5-Radial Point Interpolation Method (RPIM)

6-Moving Least Squares (MLS)

7-Polynomial Point Interpolation Method (PPIM)

از روش اجزا محدود بدست آمد. برای این حالت ساده، مشخصه مهم مربوط به هر جزء یا المان طول آنست. بر حسب این طول می توان به طور تقریبی، محیط و مساحت دایره و یا به عبارت دیگر عدد پی را تخمین زد.



شکل ۱-۲ نحوه گسسته سازی روش اجزای محدود

این روش همچنین موجب پیدایش راه حل های جالبی شد. برای مثال میتوان دایره را یک چند ضلعی محیطی و یا محاطی جایگزین کرد. یکی از آنها حد بالایی و دیگری حد پایینی برای محیط و مساحت دایره به ما خواهد داد. میانگین این دو جواب تقریبی، به جواب واقعی بسیار نزدیک خواهد بود. افزون بر این با ازدیاد تعداد اجزا، همگرایی به طرف جواب های واقعی انتظار می رود.

روش اجزای محدود از دیدگاه ریاضی یک راهکار عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است و از دیدگاه مهندسی یک راهکار عددی برای حل مسائل تحلیل تنش، انتقال حرارت، جریان سیالات، الکترو مغناطیس و غیره است.

بعضی فواید روش اجزای محدود به شرح زیر می باشد:

- قدرت روش اجزای محدود در انواع اندازه ها و مدل کردن سازه ها با هندسه دلخواه

- قدرت روش در برخورد با بارگذاری دلخواه از جمله بارگذاری حرارتی

- سازه اجزای محدود شبیه به سازه واقعی است و پدیده مجزا و غیر قابل تصویر نیست.

روش اجزا محدودی که به صورت شناخته شده امروزی است، در سال ۱۹۵۶ به وسیله Turner، Clough، Top و Martin در رساله ای ارائه شده است، این رساله کاربرد عناصر محدود ساده (میله های مفصل شده و ورق مثلی) برای تحلیل سازه هواپیما را نشان می دهد و به عنوان یکی از پیشرفت های کلیدی در توسعه روش عناصر محدود در نظر گرفته می شود. همراه با توسعه کامپیوترهای دیجیتالی با سرعت های بالا، کاربرد روش عناصر محدود هم با نرخ فزاینده ای پیشرفت نمود. بعد از اینکه روابط عناصر محدود در حالت استاتیکی

خطی توسعه یافت، کاربرد روش عناصر محدود در زمینه های دیگر نیز ادامه یافت. برای مثال می توان زمینه هایی مانند پاسخ دینامیکی و ارتعاشی، کمانشی، غیر خطی هندسی و مادی، اثرات حرارتی، اندرکنش سازه و سیال، اندرکنش سازه و اکوستیک، شکست، مواد مرکب لایه ای، انتشار موج، دینامیک سازه های فضایی و هواپیما را نام برد.

مراحل کلی تحلیل یک سیستم مهندسی عبارتند از :

-انتخاب یک مدل ریاضی برای یک مسئله فیزیکی.

-فرمول بندی مدل ریاضی و حل آن و یافتن و تفسیر نتایج.

مدلهای ریاضی شامل :

-مدل پارامتر متمرکز (گسسته سیستم)

-مدل مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته (پیوسته سیستم)

بی شک می توان روش المان محدود را معروف ترین و پر کاربردترین روش در حل معادلات دیفرانسیل دانست. پیدایش روش اجزا محدود به حل مسائل پیچیده الاستیسیته و تحلیل سازه ها در مهندسی عمران و هوا فضا برمی گردد. این روش حاصل کار الکساندر هرنیکوف (۱۹۴۱) و ریچارد کورانت (۱۹۴۲) می باشد. با این که روش کار این دو دانشمند کاملاً متفاوت بود، اما یک ویژگی مشترک داشت: تقسیم یک دامنه پیوسته (ماده) به یک سری زیردامنه (قطعات کوچکتر ماده) به نام المان. تاریخچه گسترش و توسعه روش المان محدود در منابع مختلف آورده شده است (گوپا و همکاران ۱۹۹۶) که در اینجا از بیان آن صرف نظر می گردد.

۱-۲-۲ روش المان مرزی

روش المان مرزی یکی از روش های مناسب در حل معادلات دیفرانسیل حاکم در مسائل مهندسی است که کم کم جای خود را در بین روش های قدیمی تر باز کرده است. در این روش از گسسته سازی مرز برای حل کردن معادلات انتگرالی مرزی استفاده می شود. در اوایل دهه ۶۰ در زمینه های مختلف مهندسی از این موضوع کمک گرفته شد. نقطه تحول در پیشرفت این روش، انتشار مقاله ای بود که در آن المان های ایزوپارامتریک برای اولین بار استفاده شد و باعث استفاده از الگوریتم های قوی روش المان محدود در این روش شد. ساختار امروزی روش المان مرزی برای اولین بار در سال ۱۹۷۸ معرفی شد.

بخشی از پیشرفت این روش مدیون مجموعه مقالات نخستین کنفرانس بین المللی المان مرزی و بخش دیگر مدیون انتشار اولین کتاب در این زمینه توسط گروه تحقیق محاسبات مکانیکی می باشد. اولین کتاب تحت عنوان روش های معادلات انتگرالی برای حل عددی مسایل مقدار مرزی الاستیسیته و تئوری پتانسیل در سال ۱۹۷۷ توسط جاسون و سیم منتشر شد. بدین ترتیب روش المان مرزی وارد حوزه تحلیل های مهندسی شد و کم کم بعنوان روشی مناسب در کنار روش های دیگر نظیر المان محدود معرفی شد.

این روش به خاطر تنها نیاز به المان‌بندی مرز محیط مورد بررسی در تحلیل مسایل با رفتار الاستیک از مزیت بالایی نسبت به دیگر روش‌های عددی برخوردار می‌باشد. بررسی خزش وابسته به زمان مواد با استفاده از توابع شکل هنکل کروی توسط بهرامپور و همکاران (۲۰۲۰). بررسی مسائل دوبعدی استاتیکی و دینامیکی با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه توسط حمزه جواران و همکاران (۲۰۱۸). بررسی مسائل الاستواستاتیک و دینامیکی با استفاده از المان کروی هنکل در روش المان مرزی توسط حمزه جواران و همکاران (۲۰۱۷). تجزیه و تحلیل دینامیکی سطوح ارتجاعی با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه RBF در روش المان مرزی دوگانه توسط حمزه جواران و همکاران (۲۰۱۴). تجزیه و تحلیل مسائل دوبعدی با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه جدید در روش المان مرزی توسط خاجی و همکاران (۲۰۱۳). تجزیه و تحلیل دینامیکی سطح با استفاده از توابع بسط نوع یک بعنوان تابع پایه شعاعی در روش المان مرزی دوگانه توسط حمزه جواران و همکاران (۲۰۱۱). تجزیه و تحلیل الاستودینامیک با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه جدید در روش المان مرزی دوگانه توسط حمزه جواران و همکاران (۲۰۱۱). صورت پذیرفته است. بعلاوه این روش در بهینه سازی سازه‌ها (راس و همکاران ۲۰۰۲) (کرولازا و همکاران ۲۰۰۰)، تحلیل تنش‌ها (علی آبادی و همکاران ۲۰۰۲)، مکانیک سیالات (نزر و همکاران ۲۰۰۶) و انتقال حرارت (جینگ ۲۰۱۵) کاربرد فراوان دارد. از دیگر مزایای این روش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد (پترووا و همکاران ۱۹۹۲):

دقت: المان مرزی یک روش نیمه تحلیلی است و دارای دقت بالایی مخصوصاً در مسائل تمرکز تنش همچون آنالیز شکست سازه‌ها می‌باشد.

کارآمدی در تولید هندسه: با این روش تولید شبکه در هندسه‌های سه بعدی یا مسائل با مرز بینهایت بسیار ساده‌تر از سایر روش‌ها انجام می‌شود.

نیاز به حافظه کامپیوتری کمتر: روش المان مرزی با کاهش یک بعد از ابعاد مساله و به عبارتی تبدیل مسایل سه بعدی به دوبعدی و یا تبدیل مسایل دوبعدی به یک بعدی تاثیر به سزایی در کاهش حجم محاسبات دارد. این روش همانند روش‌های دیگر عددی بدون مشکل و نقص نیست. یک نقطه ضعف مهم این روش ناکارآمدی در تحلیل مسائل غیرخطی می‌باشد. کارایی روش اجزای مرزی در تحلیل سیستم‌های با رفتار الاستوپلاستیک، به علت ظهور تنش‌های پلاستیک و ایجاد انتگرال‌های حجمی ناشی از آنها در فرمول بندی مساله، به شدت کاهش می‌یابد چرا که در آن، علیرغم پیچیدگی حاکم بر فرمول بندی روش تحلیل به المان بندی دامنه به منظور محاسبه انتگرال‌های روی دامنه نیاز است که این خود زمان‌بر می‌باشد.

امروزه روش‌های مختلفی برای حل این مسائل بوجود آمده است. مهمترین این روش‌ها عبارتند از: روش حل خصوصی، روش خطی سازی، روش انتقال انتگرال به مرز، روش انتگرالگیری درون مرز و روش دو گانه.

کلی ترین روش در المان مرزی برای محاسبه اینگونه انتگرالها روش دو جانبه ای است و دیگر روش ها در حالت های خاص قابل استفاده هستند. این روش برای اولین بار توسط ناردینی و بریبا برای حل مسائل الاستودینامیک و سپس توسط رابل و بریبا برای مسائل دیفیوژن به کار رفت.

۱-۲-۳ روش تفاضل محدود

این روش که به اختصار (FDM) نامیده می شود، یکی از روش های عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است. در این روش مشتق توابع با تفاضلات معادل آنها تقریب زده می شود. اساس این روش برای حل معادلات استفاده از تقریب تابع با استفاده از بسط تیلور است. شاید بتوان شروع شکل امروزی این روش را سال ۱۹۲۸ توسط فردریش و لوی برای حل مسائل فیزیک و ریاضی دانست. روش تفاضل محدود برای سال های بسیاری در مسائل دینامیک سیالات محاسباتی استفاده شده است. آنچه امروز به عنوان روش نقاط محدود شناخته می شود در واقع نسخه جدیدی از روش هایی با عنوان روش های تفاوت محدود در شبکه نامنظم می باشد. یکی از نخستین تلاشها در این زمینه توسط جنسون انجام گرفت و نتایج آن در سال ۱۹۷۲ در رساله ای به عنوان روش تفاوت های محدود در شبکه های نامنظم منتشر گردید. روش تفاضلات محدود برای شبکه های نامنظم با وجود سادگی تئوری و سرعت بالا، دارای یک اشکال اساسی یعنی ناپایداری این روش بود و همگرایی جوابها نسبت به شکل شبکه و نحوه انتخاب گره های همسایه شدیداً حساس بود که محققان درصدد یافتن راهی برای حل این مشکل بر آمدند و مقالات مختلفی در این زمینه چاپ شد (پترووا و همکاران ۱۹۹۲).

۱-۲-۴ روش های بدون شبکه

روش های عددی همانند المان محدود، المان مرزی یا تفاضلات محدود نیاز به ایجاد گره و ارتباط بین آنها می باشند. این فرآیند که به مش بندی معروف است، فرآیند زمانبری می باشد. هنگام رویارویی مسئله با یک ناپیوستگی (همچون رشد ترک)، شبکه ی اولیه المان ها از انطباق خود با شرایط جدید ناتوانند. بعلاوه هنگامی که مسایل با تغییر شکل های بزرگ مدل سازی می گردد المان ها ممکن است بسیار بد فرم شود که خطای زیادی در محاسبات ایجاد می کند.

اما در دو دهه اخیر روش های جدیدی شکل گرفت که با توجه به مزیت های زیادی که این روش ها دارند بسیار مورد استقبال قرار گرفت. در این روش ها تقریب های عددی حل معادله دیفرانسیلی، نه بر مبنای المان ها و روابط پیوستگی بین آنها، بلکه بر مبنای مجموعه ای از نقاط انجام می پذیرد. لذا به این گونه روش ها، در اصطلاح، روش های تحلیل بدون المان یا بدون شبکه گفته می شود.

ایده اولیه روش‌های بدون المان به کاربرد روش هیدرودینامیک ذره هموار شده در مدل کردن مسایل مربوط به اختر فیزیک توسط گینگولد و مونقان در سال ۱۹۷۷ بر می‌گردد که در حل آنها به علت نامحدود بودن ناحیه حل، شرایط مرزی وجود ندارد. جانسون و بسل روش جدیدی را به منظور اصلاح روش SPH و محاسبه کرنش‌ها (مشتقات) ارائه کردند. لوسی در ۱۹۷۷ از روش SPH برای بررسی فرضیه فوزیون استفاده کرد و مساله دینامیک گاز را بدون در نظر گرفتن مرز با استفاده از روش (Collocation) حل نمود. روش برآورد کرنل که یک روش برای تقریب زدن توابع پیوسته است، توسط مونقان و همکاران در سال ۱۹۸۲ ارائه گردید. این روش فاقد دقت لازم در تحلیل معادلات دیفرانسیل جزئی بود. نایرولز و همکاران در ۱۹۹۲ برای اولین بار از روش درونیابی حداقل مربعات متحرک برای پیدا کردن توابع شکل در روش حل گالرکین استفاده نمودند و روشی را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معمولی ارائه نمودند که روش المان پخش شده (DEM) نامیده می‌شود. (مونقان ۱۹۷۷) (گینگلد و همکاران ۱۹۷۷)

۱-۲-۵ روش نقاط محدود

در کنار روش اجزای محدود دسته جدیدی از روش‌های عددی، به نام روش‌های بدون المان شکل گرفته‌اند که ویژگی بارز آنها استفاده از شبکه دلخواهی از نقاط گرهی بدون نیاز به تشکیل شبکه‌ای از المان می‌باشد. یکی از معروف‌ترین روش‌های بدون المان، روش نقاط محدود می‌باشد. این روش که یکی از کارآمدترین روش‌های حل عددی بدون شبکه به شمار می‌رود، دارای این ویژگی بارز است که در آن معادلات دیفرانسیل در نقاط گره‌ای واقع در سطح دامنه حل مساله به صورت مستقیم ارضا می‌شوند که این امر باعث افزایش قابل توجهی در کارایی و انعطاف پذیری این روش گردیده است. در این روش برای درونیابی توابع مجهول می‌توان از انواع روش‌های تقریب توابع از جمله سری تیلور محدود، حداقل مربعات، حداقل مربعات متحرک، حداقل مربعات مقید شده و... استفاده نمود.

روش نقاط محدود در ادامه توسعه روش‌های تفاوت محدود با شبکه نامنظمی از نقاط توسط اوناته ارائه شد. از ویژگی‌های اصلی این روش ارضای معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی به طور مستقیم می‌باشد و از روش حداقل مربعات متحرک یا وزنی می‌توان برای درونیابی استفاده کرد.

روش حداقل مربعات وزنی بطور مکرر در روش‌های بدون المان برای تقریب توابع مجهول بکار می‌رود. در سال ۱۹۹۶ دو رساله توسط اوناته و همکارانش درباره روش نقاط محدود انتشار یافت، رساله اول روش نقاط محدود در مکانیک محاسباتی بود که در آن رساله ادعا شده بود که در این روش از لحاظ سرعت و دقت با دیگر روش‌های عددی متداول قابل مقایسه است. دقت حل مساله با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی در مقایسه با روش حداقل مربعات استاندارد بهبود یافته است و میزان حساسیت حل نسبت به حذف و یا

جابه جا شدن نقاط در روش حداقل مربعات متحرک وزنی کم، ولی در روش حداقل مربعات استاندارد میزان حساسیت زیاد است.

از این زمان به بعد، تلاش‌های فراوانی جهت استفاده از روش بدون المان نقاط محدود در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله در محیط‌های دو بعدی با توزیع نقاط نامنظم صورت گرفت. روش نوینی برای حل مسائل مکانیک جامدات به کمک روش نقاط محدود توسط طباطبایی در سال ۱۳۸۰ ارائه گردید. که در این روش به جای ارضای مستقیم شرایط مرزی طبیعی در گره‌های واقع بر مرز از معادله‌های جایگزین و حاصل از ترکیب خطی شرایط مرزی طبیعی و معادلات دیفرانسیل تعادل استفاده شده است. از دیگر ویژگی‌های این راه حل استفاده از مختصات محلی در درونیابی تابع می‌باشد که موجب ارضای کاملاً دقیق شرایط مرزی ضروری، بالاتر بردن دقت و همگرایی روش در حل مسائل شده است. همچنین بی‌طرف در سال ۲۰۰۶ مسائل انتشار یون کلر در سازه‌های بتنی و محاسبه عمر مفید سازه‌های بتنی را با روش بدون المان نقاط محدود حل کرد.

حل مساله در روش‌های بدون المان مبتنی بر شبکه‌ای از نقاط گره‌ای است که با توزیع دلخواه در سطح دامنه پراکنده شده‌اند، هیچ گونه پیوستگی بین نقاط وجود ندارد بنابراین نیاز به تعریف روابط بین نقاط قبل از حل مسئله نمی‌باشد. این روش‌ها در برابر حذف و یا اضافه کردن نقاط به دامنه بسیار انعطاف پذیرند و چون نیازی به تعریف المان ندارند در حل مسئله انتشار ترک، شکست و تغییر شکل‌های بزرگ با مشکلات کمتر مواجه هستند. این مزایا باعث شده است که روش‌های بدون المان توسعه قابل توجهی پیدا کنند و به عنوان نسل جدیدی از روش‌های عددی مورد توجه محققین قرار بگیرند.

۱-۲-۶ روش عددی منیفلد

روش عددی منیفلد نخستین بار در سال ۱۹۹۲ به همراه روش انتگرال‌گیری سیمپلکس^۱ (شی و همکاران ۱۹۹۶) که برای استفاده در روش‌های عددی معرفی شد، توسط شی^۲ (شی و همکاران ۱۹۹۲) ارائه گردید. روش منیفلد در واقع ترکیبی از دو روش تغییرشکل‌های گسسته (شی و همکاران ۱۹۸۵) و روش اجزا محدود است (چین و همکاران ۲۰۱۵)، پس در ناپیوستگی‌ها (مانند شکست و ترک) از توانایی‌های روش تغییرشکل-های گسسته استفاده می‌کند و برای تحلیل مسائل تنش-کرنش به اندازه روش اجزا محدود قدرتمند است (چین و همکاران ۲۰۰۷). از آن‌جا که این روش توانایی حل مسائل پیوسته و گسسته در یک سیستم واحد را دارد، مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است.

1-Simplex Integration

2-Gen-hua Shi

ویژگی‌ای که این روش را از سایر روش‌ها متمایز می‌کند استفاده از دو نوع پوشش مستقل ریاضیاتی و فیزیکی است. شبکه ریاضیاتی شامل توابع ریاضیاتی است و شبکه فیزیکی جهت تعریف هندسه فیزیکی، قیدها و سایر روابط فیزیکی ایجاد می‌شود.

۱-۲-۶-۱ انتخاب پوشش‌ها

در روش منیفلد معمولاً به علت راحت بودن در استفاده و تطبیق‌پذیری بهتر روی دامنه فیزیکی، از ساده‌ترین شکل‌ها در هر بعد (خط در یک بعد، مثلث در دو بعد و هرم در سه بعد) به عنوان پوشش استفاده می‌شود. البته برخی محققین از المان‌های دیگر استفاده کردند. برای مثال شیو و همکاران^۱ (شایو و همکاران ۱۹۹۷) از المان‌های ایزو پارامتریک چهار گرهی شبکه المان محدود در روش منیفلد استفاده کردند. آن‌ها به بررسی رفتار یک تیر لایه‌ای تحت تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ پرداختند. همچنین ژنگ و همکاران^۲ (زهانگ و همکاران ۲۰۰۲) منیفلد درجه دو با شش پوشش را مورد بررسی قرار دادند. فن و همکاران^۳ (فان و همکاران ۲۰۱۵) روش منیفلد درجات بالا با استفاده از المان‌های مثلثی^۴ نه گرهی را بررسی کرده و به مطالعه یک ورق سوراخ‌دار تحت کشش، و تیر کنسول تحت بار خارجی پرداختند.

از آنجاکه اکثر موارد استفاده از روش عددی منیفلد توسط المان‌های مثلثی صورت گرفته است، انتگرال‌گیری در این روش با استفاده از روش انتگرال‌گیری سیمپلکس و به صورت تحلیلی انجام می‌شود؛ که مزیتی بزرگ نسبت به بسیاری از روش‌های عددی مانند روش اجزا محدود دارد که انتگرال‌گیری در آن‌ها به صورت عددی انجام می‌شود؛ این روش علاوه بر شی^۴، توسط لو^۵ (۲۰۰۲) و کورپینیس و همکاران^۶ (۲۰۰۳) نیز بررسی شده است. هرچند موارد اندکی هستند که در آن‌ها محققین از روش‌های عددی برای انتگرال‌گیری استفاده کرده‌اند، برای مثال ساساکی و اُنیشی^۷ (۲۰۰۱) و چنگ و همکاران^۸ (۲۰۰۲) از المان‌های مستطیلی و چن و همکاران^۹ (۲۰۰۱) از المان‌های دایره‌ای و روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده کرده‌اند.

1-Shyu et al

2-Zheng et al

3-Fan et al

4-Ghen-hua Shi

5-Lu

6-Kourepinis et al

7-Sasaki and Ohnishi

8-Cheng et al

9-Chen et al