



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی عمران و نقشه‌برداری

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مهندسی عمران - زلزله

عنوان :

آنالیز دینامیکی در محیط گسسته به روش عددی منیفلد

استاد راهنما :

آقای دکتر حسن قاسم زاده

نگارش:

حامد کریمی

بهمن ماه ۱۳۹۴



بمشکر از استاد عزیز و بزرگوارم

جناب آقای دکتر حسن قاسم زاده

که صبورانه مراد انجام این پایان نامه راهنمایی نمودند.

بمشکر از آقای دکتر محمد علی رمضان پور

که بار راهنمایی و همکاری

لطف خود را شامل حال بنده نمودند.

چکیده:

با توجه به پیچیدگی و یا عدم امکان دست‌یابی به یک حل تحلیلی به منظور بررسی رفتار یک سازه با شرایط مرزی و هندسه‌های متفاوت، نیاز به روش‌های مدل‌سازی عددی خصوصاً در رشته‌های مهندسی مانند عمران و مکانیک، بسیار پررنگ و حائز اهمیت می‌باشد. در پایان نامه حاضر، روش عددی منیفلد به منظور مدل‌سازی‌های استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها در حالات یک و دوبعدی مورد استفاده قرار گرفته است. با توجه به اینکه روش اجزاء محدود در مسائل مهندسی یک روش پایه محسوب می‌گردد و اکثر نیازهای مهندسی با استفاده از این روش، پاسخ داده می‌شوند این روش دارای معایبی مانند هزینه محاسباتی و زمانی بالا در مدل‌سازی‌های دقیق، کوچک‌سازی مش‌ها در هندسه‌های پیچیده و حساسیت بسیار بالای المان‌ها نسبت به مرزهای فیزیکی می‌باشد. بدین منظور و برای پاسخگویی به نیازهای مهندسی، روش عددی منیفلد معمولی و درجات بالا در این پایان نامه معرفی گردیده و سپس به بررسی کاربردهای آن در مسائل گوناگون محیط‌های پیوسته و گسسته پرداخته شده است. به عنوان مثال برخورد میله الاستیک با سطح صلب، ارتعاشات و تحلیل فرکانسی تیرهای تیموشنکو، تغییر شکل‌های دو بعدی مسائل تیر و صفحه و مسائل سقوط آزاد و تماس بلوک‌های دو بعدی در پایان‌نامه حاضر بررسی شده است. در پایان، مزایای این روش نسبت به روش اجزاء محدود معمولی، نظیر عدم حساسیت به هندسه فیزیکی، دقت بالاتر، هزینه محاسباتی پایین‌تر و زمان محاسبه کمتر خصوصاً در روش منیفلد درجات بالا معرفی گردیده است.

کلمات کلیدی: روش عددی منیفلد، روش اجزاء محدود، آنالیز دینامیکی، محیط پیوسته، محیط

گسسته

فهرست مطالب

۱	مقدمه.....	(۱)
۲	طرح مساله.....	(۱-۱)
۳	سئوالات تحقیق.....	(۲-۱)
۳	نوآوری های تحقیق.....	(۳-۱)
۴	روش تحقیق.....	(۴-۱)
۵	مروری بر ادبیات موضوع.....	(۲)
۵	روش عددی منیفلد.....	(۱-۲)
۸	مساله وابستگی خطی.....	(۲-۲)
۱۱	تئوری و معادلات روش منیفلد.....	(۳)
۱۱	مقدمه.....	(۱-۳)
۱۱	روش منیفلد معمولی یک بعدی.....	(۲-۳)
۱۳	روش منیفلد درجات بالا یک بعدی.....	(۳-۳)
۱۴	روش منیفلد درجات بالا دو بعدی.....	(۴-۳)
۲۰	روش حداقل انرژی پتانسیل.....	(۵-۳)
۲۰	انرژی پتانسیل ناشی از اینرسی.....	(۱-۵-۳)
۲۳	انرژی پتانسیل ناشی از نیروی گرانش.....	(۲-۵-۳)
۲۳	انرژی پتانسیل ناشی از کرنش.....	(۳-۵-۳)
۲۴	انرژی پتانسیل ناشی از فر تماسی خطی.....	(۴-۵-۳)
۲۵	انرژی پتانسیل ناشی از میرایی.....	(۵-۵-۳)
۲۶	مدل سازی تیرهای یک بعدی با استفاده از روش انرژی.....	(۶-۳)
۳۰	روش باقی مانده وزنه دار در مسائل المان های تیری.....	(۷-۳)
۳۶	آنالیزهای غیر خطی استاتیکی و دینامیکی.....	(۸-۳)
۳۸	شناسایی مساله وابستگی خطی و نحوه رفع آن.....	(۹-۳)

۴۵.....	۴) صحت سنجی و ارائه نتایج
۴۵.....	۱-۴) مسائل محیط پیوسته
۴۵.....	۴-۱-۱) ارتعاش سیستم جرم-فنر
۵۲.....	۴-۱-۲) ارتعاش سیستم با جرم توزیع شده
۵۶.....	۴-۱-۳) تغییر شکل تیرهای اویلری و تیموشنکو
۶۳.....	۴-۱-۴) تحلیل فرکانسی تیرهای تیموشنکو
۷۳.....	۴-۱-۵) آنالیزهای غیرخطی
۷۶.....	۴-۱-۶) تغییر شکل دوبعدی تیر کنسول
۸۳.....	۴-۱-۷) تغییر شکل دو بعدی صفحه فولادی
۸۶.....	۴-۱-۸) تیرهای اویلری
۸۷.....	۴-۲) آنالیز دینامیکی در محیط گسسته
۸۷.....	۴-۲-۱) سقوط آزاد و برخورد میله یک بعدی
۹۵.....	۴-۲-۲) سقوط آزاد المان دوبعدی
۹۷.....	۴-۲-۳) سرخوردن بلوک صلب در محیط بی اصطکاک
۹۹.....	۵) جمع بندی و پیشنهادات
۱۰۱.....	۶) ضمائم
۱۰۴.....	منابع و مراجع

فهرست جداول

- جدول ۳-۱: نمایش مساله وابستگی خطی مجهولات در سقوط آزاد میله یک بعدی ۴۰
- جدول ۳-۲: نمایش مساله وابستگی خطی مجهولات در مساله تغییر شکل صفحه مثلثی ۴۱
- جدول ۴-۱: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت بارگذاری برشی سینوسی ۴۷
- جدول ۴-۲: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت بار سینوسی برشی با فرکانس طبیعی ۴۸
- جدول ۴-۳: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت زلزله لوما پریتا ۵۰
- جدول ۴-۴: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت زلزله نورث ریج ۵۲
- جدول ۴-۵: نتایج محاسبه شده برای سیستم با جرم توزیع شده به روش تحلیلی، نیومارک و منیفلد تحت بار سینوسی محوری ۵۳
- جدول ۴-۶: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع واحد ($L/h = 1$) شبکه منطبق ۵۹
- جدول ۴-۷: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع چهار ($L/h = 4$) شبکه منطبق ۵۹
- جدول ۴-۸: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع ده ($L/h = 10$) شبکه منطبق ۶۰
- جدول ۴-۹: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع واحد ($L/h = 1$) شبکه نامنطبق ۶۰
- جدول ۴-۱۰: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع چهار ($L/h = 4$) شبکه نامنطبق ۶۰
- جدول ۴-۱۱: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع ده ($L/h = 10$) شبکه نامنطبق ۶۱
- جدول ۴-۱۲: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع واحد ($L/h = 1$) شبکه منطبق ۶۲
- جدول ۴-۱۳: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع چهار ($L/h = 4$) شبکه منطبق ۶۲
- جدول ۴-۱۴: خیز تارخشی تیر دوسر ساده با نسبت طول دهانه به ارتفاع ده ($L/h = 10$) شبکه منطبق ۶۲
- جدول ۴-۱۵: نتایج تحلیلی حالت خمشی خالص و معادله تغییرات مفرد برای تیر تیموشنکو کنسول ۶۶
- جدول ۴-۱۶: خطای فرکانس های مود خمشی یک تیر کنسول در مقایسه با معادله تغییرات مفرد ۶۷

جدول ۴-۱۷: فرکانس‌های خمشی، برشی و خمش خالص محاسبه شده توسط روش معادله تغییرات مفرد و

حل تحلیلی ۷۱

جدول ۴-۱۸: فرکانس‌های مود خمشی یک تیر دوسر آزاد به روش منیفلد ۷۳

جدول ۴-۱۹: خواص مصالح مورد استفاده در تحلیل عددی ۷۶

جدول ۴-۲۰: خطای نسبی خیز محاسبه شده تیر کنسول به روش منیفلد و اجزاء محدود ۷۸

جدول ۴-۲۱: خطای ناشی از فرض سختی‌های متفاوت در مساله سقوط آزاد میله نامیرای مصنوعی ۹۲

جدول ۴-۲۲: خطای ناشی از فرض سختی‌های متفاوت در مساله سقوط آزاد میله با نسبت میرایی ۱۰٪ ۹۳

جدول ۴-۲۳: خطای ناشی از فرض سختی‌های متفاوت در مساله سقوط آزاد میله با میرایی بحرانی ۹۴

جدول ۴-۲۴: خطای ناشی از فرض سختی‌های متفاوت در مساله سقوط آزاد میله با میرایی ۱۵۰٪ ۹۵

جدول ۶-۱ ضرایب مورد استفاده در محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو ۱۰۱

فهرست اشکال و نمودارها

- شکل ۱-۱: عدم انطباق شبکه ریاضیاتی با محیط فیزیکی در روش منیفلد ۲
- شکل ۱-۳: نمایش الف: هندسه فیزیکی و قیدها، ب: پوشش‌های ریاضیاتی (MC) یک بعدی ج: پوشش‌های فیزیکی (PC) یک بعدی و د: المان‌های منیفلد (ME) در فضای یک بعدی ۱۲
- شکل ۲-۳: المان منیفلد تیری در حالت یک بعدی ۱۴
- شکل ۳-۳: نمایش الف: پوشش‌های ریاضیاتی ب: پوشش‌های فیزیکی و ج: المان‌های منیفلد دو بعدی ۱۵
- شکل ۴-۳: نمایش پوشش‌های ریاضیاتی شش ضلعی و پوشش‌های فیزیکی دو بعدی ۱۶
- شکل ۵-۳: المان منیفلد با چهار درجه آزادی در مختصات محلی ۲۷
- شکل ۶-۳: المان منیفلد تیری یک بعدی با چهار گره ۲۸
- شکل ۷-۳: فلوچارت کنترل نتایج در تحلیل استاتیکی غیرخطی ۳۷
- شکل ۸-۳: مدل‌سازی یک المان منیفلد یک بعدی در مساله سقوط آزاد ۳۸
- شکل ۹-۳: مدل‌سازی بارگذاری استاتیکی یک نیم صفحه مثالی با یک المان منیفلد درجه ۲ ۴۱
- شکل ۱۰-۳: هندسه و بارگذاری یک صفحه فولادی ۴۲
- شکل ۱۱-۳: المان بندی با شبکه منطبق بر صفحه فولادی ۴۲
- شکل ۱۲-۳: فلوچارت محاسبات در روش عددی منیفلد شرایط استاتیکی ۴۳
- شکل ۱-۴: مدلی از سیستم جرم متمرکز-فنر تحت بارگذاری برشی ۴۵
- شکل ۲-۴: بارگذاری سینوسی گذرا وارد بر نوک سیستم جرم-فنر بصورت محوری ۴۶
- شکل ۳-۴: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت بارگذاری برشی سینوسی ۴۷
- شکل ۴-۴: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت بار سینوسی برشی با فرکانس طبیعی ۴۸
- شکل ۵-۴: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت زلزله لوما ۴۹
- شکل ۶-۴: مقایسه دقیق تر روش منیفلد با روش نیومارک تحت زلزله لوما پریتا ۵۰
- شکل ۷-۴: پاسخ سیستم جرم-فنر تحت زلزله نورث ریج ۵۱
- شکل ۸-۴: مقایسه دقیق تر روش منیفلد با روش نیومارک تحت زلزله نورث ریج ۵۱

- شکل ۴-۹: مدلی از سیستم با جرم توزیع شده در طول آن ۵۲
- شکل ۴-۱۰: مقایسه پاسخ سیستم با جرم توزیع شده به روش های تحلیلی، نیومارک و منیفلد تحت بار سینوسی محوری ۵۴
- شکل ۴-۱۱: هندسه تیر دوسر ساده ۵۶
- شکل ۴-۱۲: خیز تیر دو سر ساده محاسبه شده به روش تحلیلی اوپلر-برنولی تحت بار گسترده ۵۷
- شکل ۴-۱۳: خیز تیر دوسر ساده محاسبه شده به روش تحلیلی تیر تیموشنکو ۵۸
- شکل ۴-۱۴: المان منیفلد تیری با چهار گره و هشت درجه آزادی ۵۹
- شکل ۴-۱۵: شبکه ریاضیاتی منطبق بر هندسه فیزیکی تیر دوسر ساده ۵۹
- شکل ۴-۱۶: شبکه ریاضیاتی نامنطبق بر هندسه فیزیکی تیر دوسر ساده ۶۰
- شکل ۴-۱۷: چهار فرکانس اول مودهای خمشی و برشی تیر تیموشنکو دوسر ساده ۶۴
- شکل ۴-۱۸: خطای فرکانس مود خمشی تیر دوسر ساده در مقایسه با حل دقیق ۶۵
- شکل ۴-۱۹: خطای فرکانس مود برشی تیر تیموشنکو دوسر ساده در مقایسه با حل دقیق ۶۶
- شکل ۴-۲۰: شبکه ریاضیاتی نامنطبق بر هندسه تیر کنسول ۶۷
- شکل ۴-۲۱: خطای فرکانس های برشی تیر کنسول محاسبه شده به روش منیفلد در مقایسه با معادله تغییرات مفرد ۶۸
- شکل ۴-۲۲: فرکانس های خمشی تیر دو سر گیردار محاسبه شده به روش اجزاء محدود، منیفلد و معادله تغییرات مفرد ۶۹
- شکل ۴-۲۳: فرکانس های برشی تیر دو سر گیردار محاسبه شده به روش اجزاء محدود، منیفلد و معادله تغییرات مفرد ۷۰
- شکل ۴-۲۴: خطای فرکانس های خمشی تیر دو سر آزاد محاسبه شده به روش اجزاء محدود و منیفلد در مقایسه با معادله تغییرات مفرد ۷۱
- شکل ۴-۲۵: خطای فرکانس های برشی تیر دو سر آزاد محاسبه شده به روش اجزاء محدود و منیفلد در مقایسه با معادله تغییرات مفرد ۷۲
- شکل ۴-۲۶: نمایش الف: الف: نمودار برش_دریفت طبقات، ب: توزیع نیروی برشی در ارتفاع ساختمان ۷۴

- شکل ۴-۲۷: نمودار نیروی برشی-دریفت طبقات، الف: طبقه اول، ب: طبقه دوم، ج: طبقه سوم، د: طبقه چهارم ۷۵
- شکل ۴-۲۸: نمودار الف: نیروی برشی-دریفت طبقه پنجم، ب: نیروی برشی به جرم-جابجایی به ارتفاع ساختمان ۷۵
- شکل ۴-۲۹: هندسه تیر کنسول دو بعدی ۷۶
- شکل ۴-۳۰: مش بندی المان محدود بوسیله ۲۰۰۰ المان کرنش ثابت مثلثی محدود ۷۷
- شکل ۴-۳۱: خیز تار خنثی تیر کنسول تحت بار متمرکز در سر آزاد توسط نرم افزار ABAQUS (مش بندی مطابق شکل (۴-۳۰) ۷۷
- شکل ۴-۳۲: شبکه ریاضیاتی و چینش المان های منیفلد منطبق ۷۸
- شکل ۴-۳۳: خیز تیر کنسول محاسبه شده به روش منیفلد درجات بالا منطبق، اجزاء محدود و تحلیلی ۷۹
- شکل ۴-۳۴: منحنی تراز جابجایی قائم تیر کنسول به روش منیفلد درجه ۳ ۷۹
- شکل ۴-۳۵: شبکه ریاضیاتی نامنطبق بر هندسه فیزیکی در مساله تیر کنسول ۸۰
- شکل ۴-۳۶: مقایسه بین نتایج شبکه منطبق و نامنطبق منیفلد درجه-۳ در مساله تیر کنسول ۸۰
- شکل ۴-۳۸: توزیع تنش نرمال σ_{xx} بوسیله دو المان درجه ۳ منیفلد شبکه نامنطبق در سطح تیر کنسول ۸۱
- شکل ۴-۳۹: توزیع تنش نرمال σ_{xx} بوسیله دو المان LST در محیط ABAQUS ۸۱
- شکل ۴-۴۰: توزیع تنش نرمال σ_{xx} بوسیله دوهزار المان CST در محیط ABAQUS ۸۲
- شکل ۴-۴۱: جابجایی افقی مرز تحتانی تیر کنسول بوسیله حل تحلیلی، المان محدود و منیفلد درجه ۴ ۸۲
- شکل ۴-۴۲: نمایش الف: هندسه و شرایط مرزی صفحه فولادی، ب: شبکه ریاضیاتی منطبق بر مرز فیزیکی ۸۳
- شکل ۴-۴۳: جابجایی قائم مرز فوقانی صفحه فولادی تحت کشش نیروی متمرکز ۸۴
- شکل ۴-۴۴: الف: جابجایی افقی مرز راست، ب: جابجایی افقی مرز چپ صفحه فولادی تحت کشش نیروی متمرکز ۸۴
- شکل ۴-۴۵: شبکه ریاضیاتی نامنطبق بر مرز فیزیکی در مساله صفحه فولادی ۸۵
- شکل ۴-۴۶: جابجایی قائم مرز فوقانی صفحه فولادی تحت کشش در شبکه های منطبق و نامنطبق ۸۵

- شکل ۴-۴۷: الف: جابجایی افقی مرز راست، ب: جابجایی افقی مرز چپ صفحه فولادی تحت کشش نیروی متمرکز در شبکه های منطبق و نامنطبق ۸۶
- شکل ۴-۴۸: شبکه ریاضیاتی منطبق بر تیر دوسر ساده دو بعدی ۸۶
- شکل ۴-۴۹: نتایج خیز تار خنثی به روش منیفلد درجات بالا و حل تحلیلی ۸۷
- شکل ۴-۵۰: رفتار قسمت فوقانی میله نامیرا تحت سقوط آزاد و برخورد با زمین صلب با تزریق مصنوعی میرایی ۸۸
- شکل ۴-۵۱: منحنی سرعت میله نامیرای مصنوعی در مساله تماس بالا: قسمت فوقانی میله ، پایین: مرکز جرم میله ۸۹
- شکل ۴-۵۲: منحنی شتاب میله نامیرای مصنوعی در مساله تماس بالا: قسمت فوقانی میله ، پایین: مرکز جرم میله ۹۰
- شکل ۴-۵۳: رفتار قسمت فوقانی میله نامیرای خالص تحت سقوط آزاد و برخورد با زمین صلب ۹۰
- شکل ۴-۵۴: منحنی سرعت میله نامیرای خالص در مساله تماس بالا: قسمت فوقانی-تثانی میله ، پایین: مرکز جرم میله ۹۱
- شکل ۴-۵۵: منحنی شتاب میله نامیرای خالص در مساله تماس بالا: قسمت فوقانی-تثانی میله ، پایین: مرکز جرم میله ۹۲
- شکل ۴-۵۶: سقوط آزاد و برخورد یک میله زیر بحرانی با نسبت میرایی ۱۰٪ با زمین صلب ۹۳
- شکل ۴-۵۷: سقوط آزاد و برخورد یک میله با میرایی بحرانی با زمین صلب ۹۴
- شکل ۴-۵۸: سقوط آزاد و برخورد یک میله با نسبت میرایی فوق بحرانی ۱۵۰٪ با زمین صلب ۹۵
- شکل ۴-۵۹: نمایش جابجایی های المان منیفلد مثلثی معمولی بالا چپ: جابجایی عمودی گره-۱ بالا راست: جابجایی عمودی گره-۲، پایین چپ: جابجایی عمودی گره-۳، پایین راست: جابجایی افقی تمامی گره ها ۹۶
- شکل ۴-۶۰: سر خوردن یک المان منیفلد مثلثی روی یک بلوک صلب بی اصطکاک ۹۷
- شکل ۴-۶۱: نتایج روش منیفلد در سر خوردن یک المان مثلثی از روی بلوک صلب بی اصطکاک ۹۸

فصل اول

مقدمه

(۱) مقدمه

آنالیزهای استاتیکی، شبه استاتیکی و دینامیکی از موضوعات مورد علاقه بسیاری از محققین در رشته‌های متفاوت مهندسی از جمله مهندسی عمران، مکانیک، هوافضا و ... از دیرباز تاکنون می‌باشند. به عنوان نمونه در رشته مهندسی عمران، می‌توان آنالیز دینامیکی پل‌ها و سازه‌های بلند، آنالیز استاتیکی و دینامیکی گودها، پی‌ها و دیوارهای حائل، آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی انواع سدها و ... را برشمرد.

با توجه به حجم عظیم داده‌های ورودی و هم‌چنین رفتار مصالح در حالات خطی و غیر خطی با توجه به مثال‌های فوق، استفاده از روشی عددی که جایگزین حل تحلیلی بسیار پیچیده و در برخی موارد ناممکن و غیرعملی گردد بسیار مهم و به‌صرفه می‌باشد. روش عددی پیشنهادی باید از دقت قابل قبول و هم‌چنین سرعت پاسخگویی خوبی برخوردار باشد تا صرفه اقتصادی آن نیز لحاظ گردد. هم‌چنین روش عددی پیشنهادی باید قادر به پاسخگویی به مسائل مختلف و متفاوت باشد تا کارایی آن نیز به نمایش گذارده شود.

در گذشته روش‌های عددی مختلفی به منظور مدل‌سازی محیط‌های پیوسته و گسسته ابداع شده و بسط یافته‌اند که می‌توان به روش اجزاء محدود^۱، روش تفاضل محدود^۲، روش نیومارک^۳ به منظور مدل‌سازی محاسبات مربوط به دینامیک سازه و ... اشاره کرد. به منظور مدل‌سازی بهتر و دقیق‌تر محیط‌های گسسته روش‌های جایگزینی ابداع گردید که از بین آن‌ها می‌توان به روش تغییرشکل‌های گسسته^۴ اشاره نمود.

در دهه‌های اخیر، روش عددی دیگری ابداع شده که در مسائل مربوط به آنالیزهای عددی محیط چه در حالت پیوسته و چه در حالت گسسته، قدرت مدل‌سازی بهتر و ارائه نتایج خروجی دقیق‌تری را داراست. این روش، به نام روش عددی منیفلد^۵ شناخته می‌شود. در روش منیفلد، به منظور مدل‌سازی محیط، دو شبکه ریاضیاتی^۶ و شبکه فیزیکی^۷ تعریف می‌گردند که در فصل بعدی به تفصیل شرح داده

^۱ Finite Element Method

^۲ Finite Difference Method

^۳ Newmark's Method

^۴ Discontinuous Deformation Analysis

^۵ Numerical Manifold Method

^۶ Mathematical Covers

^۷ Physical Covers

خواهند شد. با استفاده از شبکه‌های فوق، الزامی به محدود شدن شبکه‌های ریاضیاتی به هندسه فیزیکی محیط وجود ندارد و شبکه فیزیکی وظیفه تعریف مرز و هندسه فیزیکی را بر عهده می‌گیرد. اگر از روش اجزاء محدود معمولی به عنوان یک روش عددی مطلوب نام برده شود، با توجه به حساسیت بالای روش مذکور به هندسه‌های پیچیده نیاز به کوچک‌سازی المان‌ها در همان قسمت‌های پیچیده می‌باشد که در روش منیفلد احتیاجی به این امر نیست. شکل ۱-۱ این مبحث را بهتر نشان می‌دهد. در این شکل منحنی‌های قرمز رنگ، همان شبکه‌های ریاضیاتی و مرز سیاه رنگ، مرز فیزیکی مساله می‌باشد.



شکل ۱-۱: عدم انطباق شبکه ریاضیاتی با محیط فیزیکی در روش منیفلد

در دهه اخیر توجه ویژه‌ای به روش منیفلد درجات بالا^۸ شده که علاوه بر خاصیت عدم نیاز به انطباق با محیط، دارای دقت محاسباتی بالاتر می‌باشد. در روش منیفلد درجات بالا، مسئله‌ای جدی بوجود می‌آید که سبب تکین شدن ماتریس سختی (در مسائل استاتیکی) و یا ماتریس‌های سختی و جرم (در مسائل دینامیکی) می‌گردد و فرایند محاسبات را با اختلال مواجه می‌سازد. به همین منظور در این روش شناخت صحیحی از خود مساله و روند حل مساله، بسیار لازم و حیاتی می‌باشد.

۱-۱) طرح مساله

حل مساله با دقت بالاتر و زمان محاسباتی کمتر در تمامی روش‌های عددی، مورد توجه محققین زیادی قرار دارد. در روش المان محدود معمولی، دقت بالاتر با کوچک‌سازی تعداد المان‌ها و یا افزایش تعداد گره‌های المان (افزایش مرتبه توابع شکل) بدست می‌آید که خود تاثیر بسزایی در افزایش زمان و هزینه محاسباتی دارد. هم‌چنین در مورد هندسه‌های با پیچیدگی بیشتر، مثلاً اجسام با مقاطع غیرمنشوری یا وجود بریدگی، حفره یا دیگر پیچیدگی‌های هندسی نیز الزاماً به کوچک شدن شبکه مش بندی در آن نقاط می‌انجامد. در این پایان نامه روش عددی منیفلد معمولی و درجات بالا با توجه به نوع درجه

⁸ High Order Numerical Manifold Method

شبیه‌سازی، میزان دقت و زمان محاسباتی معرفی شده و نتایج آن در حد توان با روش اجزاء محدود معمولی و یا روش عددی نیومارک مورد استفاده در تحلیل‌های دینامیکی مقایسه می‌گردد.

۲-۱) سؤالات تحقیق

سؤالاتی که در آینده به آن پاسخ داده خواهد شد عبارتند از:

۱. شبیه‌سازی معمولی و درجات بالا به روش منیفلد چگونه انجام می‌گیرد و تفاوت آنها در چیست؟
۲. شبیه‌سازی درجات بالا در روش منیفلد چه تاثیری بر دقت و زمان محاسبه نتایج دارد؟
۳. علل ایجاد پدیده وابستگی خطی مجهولات در روش منیفلد درجات بالا چیست و چگونه می‌توان آن را مرتفع نمود؟

۳-۱) نوآوری‌های تحقیق

۱. ویژگی منحصر به فردی که روش عددی منیفلد را از سایر روش‌های عددی متمایز می‌کند استقلال شبکه ریاضیاتی از هندسه فیزیکی است و نتیجه آن عدم نیاز به کوچک‌سازی مش‌ها و به تبع آن سادگی شبکه مش‌هاست. با استفاده از همین ویژگی سعی شده تا در تحلیل فرکانسی تیرهای تیموشنکو، مقایسه‌ای بین نتایج شبکه‌های منطبق و نامنطبق صورت پذیرد و کاربرد این روش در مدل‌سازی‌های دینامیکی بیشتر مشخص گردد. لازم به ذکر است که در تحقیقات پیشین صورت گرفته، روش منیفلد درجات بالا در تحلیل فرکانسی مورد استفاده قرار نگرفته است.
۲. با توجه به نیاز به دقت بیشتر نتایج خروجی در این پایان نامه سعی شده که از روش منیفلد درجات بالا با استفاده از توابع شبیه‌سازی محلی و توابع افراز واحد به گونه‌ای متفاوت در مدل‌سازی‌های مختلف استفاده گردد و نتایج با روش‌های دیگر مقایسه گردد.
۳. متأسفانه میزان مطالعات مربوط به تحلیل‌های دینامیکی خطی در روش منیفلد درجات بالا به نسبت مطالعات استاتیکی صورت گرفته بسیار کمتر است و همین طور میزان مطالعات مربوط به تحلیل‌های غیرخطی نسبت به تحلیل‌های خطی. در این پایان نامه سعی شده تا در حد توان قسمتی از تحلیل‌ها به تحلیل‌های غیرخطی استاتیکی و دینامیکی اختصاص یابد و نتایج با روش‌های دیگر مقایسه گردد.

۴. مدل‌سازی مساله تماس دینامیکی در روش‌های عددی، نیاز به شناخت صحیحی از پدیده تماس دارد. در این پایان نامه سعی شده تا با استفاده از روش حداقل انرژی پتانسیل، پدیده تماس دینامیکی یک بعدی الاستیک مدل‌سازی گردد و عواملی که سبب بروز خطا در محاسبات عددی می‌شوند، معرفی گردد.

۱-۴) روش تحقیق

جهت نیل به اهداف فوق‌الذکر ابتدا به استخراج معادلات حاکم بر رفتار خطی و غیرخطی در حالات استاتیکی و دینامیکی پرداخته سپس با توجه به فرمول‌بندی‌های متفاوت روش عددی منیفلد در حالات یک و دو بعدی به مدل‌سازی عددی مسائل متفاوت پرداخته شده است. سپس با استفاده از روش منیفلد درجات بالا، بحث وابستگی خطی^۹ مجهولات معرفی شده و روش‌هایی برای رفع و حذف این مشکل طرح شده‌اند.

^۹ Linear Dependence

فصل دوم

مروری بر ادبیات موضوع

۲) مروری بر ادبیات موضوع

در این بخش، تاریخچه‌ای از فعالیت‌های صورت گرفته در مورد روش عددی منیفلد و مساله وابستگی خطی معرفی می‌گردد.

۱-۲) روش عددی منیفلد

روش عددی منیفلد، نخستین بار توسط شی^{۱۰} [۱] ارائه شد. این روش به دلیل توانایی در حل هم‌زمان مسائل پیوسته و گسسته در یک سیستم واحد از گذشته تا به امروز مورد توجه محققین بسیاری قرار دارد. ویژگی که این روش را از سایر روش‌های مدل‌سازی عددی تفکیک می‌کند، استفاده از دو شبکه مستقل از هم به جای تعریف یک شبکه کلی وابسته می‌باشد. در این روش یک شبکه ریاضیاتی شامل توابع ریاضیاتی به هر فرم و شکل دلخواه و یک شبکه فیزیکی به منظور تعریف هندسه فیزیکی بارگذاری‌ها، ناپیوستگی‌ها، قیدها و سایر روابط فیزیکی تعریف می‌گردند. همان گونه که شرح داده شد شبکه ریاضیاتی می‌تواند به هر فرم دلخواهی انتخاب گردد و بنابراین جوابگوی نیازهای متفاوت مهندسی خواهد بود. عدم وابستگی شبکه ریاضیاتی به هندسه فیزیکی سبب عدم نیاز به مش‌بندی مجدد، تغییر شبکه مش‌بندی یا کوچک‌سازی مش‌ها در نقاط خاص مساله می‌گردد که نشان‌دهنده برتری این روش نسبت به روش اجزاء محدود معمولی می‌باشد. بصورت کلی ویژگی‌های این روش در موارد زیر خلاصه شده است.

۱. شبکه ریاضیاتی مورد استفاده در روش عددی منیفلد از هندسه مساله مستقل است که شبکه‌بندی مساله را آسان می‌کند [۲].

۲. مجهولات به پوشش‌ها اختصاص می‌یابند و نه به نقاط یا اصطلاحاً گره‌ها که همین امر باعث افزایش قدرت مدل‌سازی می‌گردد [۳].

۳. مدل‌سازی مسائل پیوسته و گسسته در یک سیستم واحد انجام می‌گیرد [۴].

۴. شبیه‌سازی درجات بالا با استفاده از توابع چندجمله‌ای درجات بالا به عنوان توابع محلی و توابع خطی افراز واحد قابل ایجاد است و نیازی به افزایش مراکز پوشش یا گره به المان نمی‌باشد. [۵]

در طی دهه‌های اخیر روش عددی منیفلد برای حل مسائل گوناگونی توسعه یافته است که به عنوان مثال بحث گسترش ترک [۷۶]، روش بدون شبکه منیفلد [۸]، حل مسائل سه بعدی [۹ و ۱۰]

¹⁰ Shi Gen-hua

گسیختگی شیروانی سنگی [۴]، مدل سازی ناپیوستگی ضعیف [۱۱]، ترک در محیط دو ماده ای [۱۲] حل دینامیکی درجات بالا در محیط های گسسته [۱۳] و... چندین نمونه از تحقیقات اخیر می باشند.

در حل مسائل گسسته، مکانیک تماس یکی از مهم ترین اجزای تحلیل می باشد. مکانیک تماس به دو قسمت الگوریتم کشف تماس و اعمال قیود تماس تقسیم می گردد. از آنجا که بحث الگوریتم کشف تماس در این پایان نامه مورد بررسی و بحث قرار نگرفته است به منظور اطلاعات بیشتر به مراجع [۱۴-۲۲] مراجعه شود. روش های پناستی^{۱۱} [۲۳ و ۲۴]، حذف مستقیم قیود تماس^{۱۲} [۲۵]، روش نیتسچ [۲۶ و ۲۸] و ... برای مدل سازی عددی مسائل مربوط به تماس بسط یافته اند.

معادلات تعادل عموماً از طریق قضیه حداقل مقدار انرژی پتانسیل^{۱۳} در روش منیفلد استخراج می گردند. با استفاده از این روش، معادلات حاکم بر مسائلی مانند آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی محیط های پیوسته و گسسته به راحتی استخراج می گردند. با این حال روش باقی مانده وزنه دار^{۱۴} نیز روش بسیار خوبی برای استخراج معادلات تعادل سیستم می باشد. لی و همکاران [۲۹] با استفاده از روش باقی مانده وزنه دار معادلات روش عددی منیفلد را محاسبه کردند و مجدداً نتایج روش انرژی را تایید کردند. روش باقی مانده وزنه دار یک روش ریاضیاتی برای حل معادلات دیفرانسیل می باشد که در بسیاری از روش های عددی مانند روش اجزاء محدود [۳۰] و روش گلرکین بدون المان^{۱۵} [۳۱] به کار برده شده است.

در روش منیفلد از فرمول بندی تفاضل مرکزی برای تعریف شتاب بلوک ها یا سیستم استفاده می گردد [۳۲، ۳۳ و ۳۴] این روش در مسائلی مانند تماس دینامیکی یا ارتعاشات که با تغییرات بالای شتاب و عدم تساوی شتاب در نواحی مختلف سیستم همراه هستند دقت پاسخگویی بالایی ندارد. بنابراین نیاز به کوچک سازی گام محاسباتی زمانی ایجاد می گردد که خود باعث افزایش زمان محاسبه و هزینه محاسباتی می گردد. در این پایان نامه با استفاده از روابط نیومارک در حالات خطی و غیرخطی [۳۴ و ۳۵] به منظور انتگرال گیری زمانی از معادلات شبیه سازی استفاده شده است.

با توجه به عددی بودن روش منیفلد، استراتژی انتگرال گیری ساده توسط لو^{۱۶}، کورپینیس^{۱۷} و سو^{۱۸} [۳۶، ۳۷ و ۳۸] بررسی شده است.

^{۱۱} Penalty Method

^{۱۲} Direct Elimination of the Geometrical Contact Constrains

^{۱۳} The Minimum Potential Energy Principle

^{۱۴} Weighted Residual Method

^{۱۵} Element-free Galerkin's Method

^{۱۶} Lu et al

^{۱۷} Kourepinis et al

^{۱۸} Su et al

چن [۵] روش منیفلد درجات بالا را به منظور توسعه دقت و عملکرد برای حل مسائل استاتیکی در محیط پیوسته بسط داد. متأسفانه به دلیل ایجاد مساله وابستگی خطی در روش منیفلد درجات بالا علی‌رغم مزیت‌های مدل‌سازی آن، محققان از استفاده از روش منیفلد اجتناب می‌کنند. [۱۱، ۱۲، ۳۲، ۳۹ و ۴۰] برای استفاده از روش منیفلد درجات بالا نیاز به بررسی مساله وابستگی خطی مجهولات و حذف آن می‌باشد که به اختصار در این پایان نامه روشی برای پرهیز از آن پیشنهاد شده است و با روش پیشنهادی قبلی [۴۱] مقایسه شده و مزیت‌ها و معایب آن برشمرده می‌شود.

با توجه به اینکه در دهه‌های اخیر، روش‌های عددی بسیاری به منظور تعریف رفتار محیط و سیستم معرفی و بسط داده شده‌اند، این سؤال به ذهن خطور می‌نماید که نقاط قوت و مزایای روش منیفلد نسبت به سایر روش‌های عددی در چیست؟ بدین منظور، در این بخش روش‌های عددی دیگری به صورت کاملاً مختصر معرفی می‌گردند تا برتری روش منیفلد مشخص گردد.

روش المان‌های طیفی^{۱۹} (SEM) به منظور حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی طی یک مقاله توسط پاترا^{۲۰} معرفی شد [۴۲]. در این روش، فرمول‌بندی براساس روش اجزاء محدود با استفاده از چندجمله‌ای درجات بالای توابع افراز واحد به عنوان توابع پایه صورت می‌گیرد. در این روش، گره‌های المان در محل صفرهای تابعی متعامد مانند لژاندر^{۲۱} قرار داده می‌شوند. نتیجه این امر، تشکیل ماتریس جرم به فرم قطری می‌باشد که هزینه محاسباتی را در مقایسه با روش اجزاء محدود به نحو چشمگیری کاهش می‌دهد. این روش در حل مسائل مهندسی از قبیل دینامیک سیالات [۴۳]، انتقال حرارت [۴۴]، آکوستیک [۴۵] و ... مورد توجه محققین قرار گرفته است. اما این روش توانایی مدل‌سازی پیشرفته در محیط‌های گسسته را ندارد و فقط در محیط پیوسته کارایی خود را نشان می‌دهد.

از روش‌های عددی دیگر روش بدون مش^{۲۲} می‌باشد. ایده این روش توسط موناغان و گینگولد^{۲۳} مطرح شد [۴۶] که در آن احتیاجی به تعریف شبکه مش‌بندی بین گره‌ها در مدل‌سازی دامنه نمی‌باشد و اندرکنش بین گره‌ها با تمامی گره‌های موجود در همسایگی آن تعریف می‌گردد. بنابراین مشخصات سیستم مانند جرم یا انرژی جنبشی به المان‌های مش‌بندی اختصاص نمی‌یابد. در دهه اخیر، چندین روش

¹⁹ Spectral Element Method

²⁰ Patera

²¹ Legendre

²² Meshless Method

²³ Monaghan & Gingold

بدون مش معرفی شده‌اند. لوسی^{۲۴} [۴۷] روش هیدرودینامیک ذرات صاف^{۲۵} (SPH) را که توسط گینگولد [۴۶] معرفی شد، توسعه داد. این روش یک روش ذرات محور، براساس ایده جابجایی سیال توسط دسته‌ای از ذرات متحرک است. این روش از مزایای ذاتی مانند انرژی صفر و راحتی در مدل‌سازی مسائل شرایط مرزی مهم برخوردار است [۴۸]. هم چنین روش‌های دیگری به نام‌های روش المان پراکنده [۴۹]^{۲۶} (DEM)، روش گلرکین بدون المان، روش بازتولید ذرات هسته‌ای [۵۰]^{۲۷} (RKPM)، روش نقاط محدود [۵۱]^{۲۸} (FPM)، روش بدون مش محلی گلرکین-پترف [۵۲]^{۲۹} (MLPG)، روش توابع پایه شعاعی [۵۳]^{۳۰} (RBF)، روش درونیابی نقاط [۵۴]^{۳۱} (PIM) و سایر روش‌های مبتنی بر روش بدون مش تولید و بسط داده شدند. روش بدون مش نیز خالی از معایب نمی‌باشد. از معایب این روش می‌توان به محدود بودن محاسبات در جابجایی‌های کوچک ذرات طی محاسبات هنگام استفاده از هسته لاگرانژی، پایداری و نوسانات به ازای توزیع مشخصی از ذرات، مشکلات مربوط به عدم پایداری و مساله دقت نتایج در روش گلرکین [۵۵] اشاره نمود.

۲-۲) مساله وابستگی خطی

همواره دقت نتایج خروجی و زمان محاسبات دو بحث مهم در شبیه‌سازی‌های عددی هستند که بوسیله روش‌هایی بر پایه افراز واحد^{۳۲} ارائه می‌گردند. برخی از این روش‌ها عبارتند از روش عددی منیفلد، روش گلرکین بدون المان، روش اجزاء محدود افراز واحد^{۳۳} [۵۶] روش بدون مش^{۳۴} [۵۷] روش اجزاء محدود گسترش یافته^{۳۵} [۵۸ و ۵۹] روش اجزاء محدود تعمیم یافته^{۳۶} [۶۰ و ۶۱] و غیره. مساله وابستگی خطی مجهولات توسط باباسکا و ملینک^{۳۷} [۶۱] در تحلیل‌های یک بعدی، اودن و همکاران^{۳۸} [۶۲] در تحلیل‌های دو بعدی و دوارت و همکاران^{۳۹} [۶۳] در تحلیل‌های سه بعدی گزارش شده است.

²⁴ Lucy

²⁵ Smoothed Particle Hydrodynamics

²⁶ The Diffuse Element Method

²⁷ Reproducing Kernel Particle Method

²⁸ Finite Point Method

²⁹ Meshless Local Petrov-Galerkin

³⁰ Radial Basis Functions

³¹ Point Interpolation Method

³² Partition of Unity based methods

³³ Partition of Unity Finite Element Method

³⁴ Meshless Method

³⁵ Extended Finite Element Method

³⁶ Generalized Finite Element Method

³⁷ Babuska & Melenk

³⁸ Oden et al

³⁹ Duarte et al

تلاش‌های بسیاری جهت حذف مساله وابستگی خطی مجهولات انجام گرفته است. باباسکا و ملینک [۶۱] توابع افراز واحدی را پیشنهاد کردند که سبب حذف مساله وابستگی خطی مجهولات در تحلیل‌های یک بعدی می‌گردد. اودن و همکاران [۶۲] پیشنهاد دادند که برخی عبارات موجود در توابع افراز واحد از توابع محلی حذف گردد؛ درحالی‌که دوارت و همکاران [۶۰] این پیشنهاد را کافی ندانستند. استروبولیس^{۴۰} و همکاران [۶۰ و ۶۰] از توابع شکل نگاشت شده المان چهاروجهی استفاده نمودند. تیان و همکاران [۶۴] با استفاده از روش اجزا محدود تعمیم یافته مساله وابستگی خطی مجهولات را در تحلیل‌های دو بعدی مورد بررسی قرار دادند. آنها بیان کردند که اولاً وجود هم‌زمان عبارات چند جمله‌ای یکسان در توابع افراز واحد و محلی علت بوجود آمدن مساله وابستگی خطی مجهولات نمی‌باشد، ثانیاً مقید سازی مناسب درجات آزادی با توان بالا اثر بسیاری در جلوگیری از ایجاد مساله وابستگی خطی مجهولات دارد، ثالثاً مقادیر ویژه صفر در ماتریس سختی برای شبکه‌های مثلثی از هندسه مستقل می‌باشد و کوچک سازی تأثیری روی آن ندارد. در حالی که شبکه‌های چهاروجهی وابستگی زیادی به موضوع مقادیر ویژه صفر ماتریس سختی دارند. با این حال از حذف قطعی وابستگی خطی صحبتی نشده و رعایت این موارد تضمینی برای رفع مساله وابستگی خطی مجهولات نمی‌باشد. سای و همکاران^{۴۱} [۶۵] یک المان مثلثی جدید را بر پایه تئوری افراز واحد توسعه دادند که از دو الگوی شبیه‌سازی محلی جداگانه برای رفتار با نقاط مرزی و داخلی استفاده می‌کند. مساله وابستگی خطی مجهولات در روش آنها برطرف شده و شرایط مرزی بصورت مستقیم قابل لحاظ می‌باشد. آن و همکاران^{۴۲} مساله کمبود مرتبه تحلیل را در فضای دو و سه بعدی مورد بررسی قرار دادند. آنها روشی برای پیش بینی کمبود مرتبه یک مش ساده ارائه دادند و بیان داشتند که کمبود مرتبه تنها به هندسه شبکه مش، توابع افراز واحد و شبیه‌سازی محلی بستگی دارد. با این حال روشی برای حذف مساله وابستگی خطی مجهولات ارائه نشد. باباسکا و همکاران [۶۴] برای مدیریت مساله وابستگی خطی مجهولات روش اجزاء محدود تعمیم یافته پایدار^{۴۳} را ارائه نمودند. این روش مشخصه شرطی سازی نامناسب تحلیل را بهبود می‌بخشد با این وجود روش اجزا محدود تعمیم یافته پایدار مشکلات همگرایی روش اجزا محدود تعمیم یافته را در خود دارد. کیم و بس^{۴۴} [۶۷ و ۶۸] روش اجزا محدود غنی شده بوسیله پوشش‌های انترپوله^{۴۵} را پیشنهاد دادند که مساله وابستگی خطی مجهولات در آن دیده نمی‌شود. الگوی پیشنهادی آنها دارای قدرت تشخیص گرادین‌های شدید و پرش تنش بین المان‌ها می‌باشد. تیان [۶۹] بدون استفاده از مجهولات اضافه، روش غنی سازی مستقل خطی روش اجزا محدود تعمیم یافته را پیشنهاد داد که به درون‌یابی دو مرحله‌ای نیاز

⁴⁰ Strouboulis

⁴¹ Cai et al

⁴² An et al

⁴³ The Stable GFEM

⁴⁴ Kim & Bathe

⁴⁵ Interpolation covers

دارد و همین باعث افزایش هزینه محاسباتی می‌گردد. فان و همکاران^{۴۶} [۴۰] با استفاده از توابع افراز واحد درجات بالا و توابع شبیه‌سازی محلی ثابت، یک المان منیفلد نه گرهی را بوجود آوردند و مساله وابستگی خطی مجهولات را به طور کلی مرتفع نمودند و به تحلیل‌های استاتیکی پرداختند. هم‌چنین فان و همکاران [۷۰] یک روش جدید بر پایه روش عددی منیفلد ایجاد کردند که بر اساس درجات آزادی مشتقاتی^{۴۷} می‌باشد که مساله وابستگی خطی مجهولات در آن ایجاد نمی‌گردد. آنها از توابع محلی جدیدی برحسب خود توابع و مشتقات آنها استفاده کردند تا مشکل وابستگی خطی مجهولات در آن ایجاد نگردد. با استفاده از توابع جدید ساخته شده آنها توانستند یک المان منیفلد مثالی با سه گره ایجاد کنند که مشکل پرش تنش در آن تصحیح شده است.

به منظور حذف مساله وابستگی خطی مجهولات، روش بالابردن درجات توابع افراز واحد نیز قبلاً توسط محققین انجام شده اما گسترده‌گی این تحقیقات به میزان روش‌های دیگر نمی‌باشد. ژانگ و همکاران^{۴۸} [۷۱] روش عددی منیفلد درجه دوم را با استفاده از المان مثالی شش گرهی توسعه دادند. هم‌چنین آنها شکست یک شیب سنگی را با استفاده از همین المان‌ها مدل‌سازی نمودند [۷۲]. کیان و همکاران^{۴۹} [۷۳] با استفاده از المان‌های منیفلد درجه دوم، مساله شکافتن دینامیکی یک دیسک سنگی برزیلی را مدل‌سازی نمودند. هم‌چنین این روش به منظور حل جریان سیال توسط ژانگ و همکاران [۷۴] استفاده شد.

با تمام تلاش‌های صورت گرفته به منظور حذف مساله وابستگی خطی مجهولات، متأسفانه هرروزه زوایای جدیدی از این مساله در محاسبات مهندسی نمایان می‌گردد که هنوز راه حل کامل و جامعی برای حذف آن یافت نشده است. در این پایان نامه سعی شده تا در حد توان مساله وابستگی خطی مجهولات از روند محاسبات حذف گردد.

⁴⁶ Fan et al

⁴⁷ Derivative Degrees of Freedom

⁴⁸ Zhang et al

⁴⁹ Qian et al

فصل سوم

تئوری و معادلات روش میخده