



دانشگاه شیراز

دانشکده ریاضی

به نام خدا

امتحان پایان ترم نظریه گراف (تحصیلات تکمیلی)

تاریخ: ۹۳/۱۰/۲۰

مدت: ۱۵۰ دقیقه

۱. فرض کنید G گرافی با دنباله درجات $d_1 \leq \dots \leq d_n$ با $n \geq 3$ باشد که برای هر $i < n/2$ داریم $d_i > i$ یا $d_{n-i} \geq n - i$. نشان دهید G همیلتونی است.

۲. نشان دهید اگر G مسطح باشد، آنگاه $\chi_e(G) \leq 5$.

۳. قضایای منگر و ماکسیم جریان-مینیم برش را بیان کنید و ارتباط بین آنها را شرح دهید (با اثبات).

۴. نشان دهید $r(k, k) \geq \sqrt{2}^k$.

۵. (i) نشان دهید اگر G گرافی منتظم و دارای رأس برشی باشد، آنگاه $\chi'(G) > \Delta(G)$.

(ii) با استفاده از قضیه ویزینگ، نشان دهید اگر G, H دو گراف ساده باشند، آنگاه $\chi'(G \times H) = \Delta(G \times H)$.

۶. (i) نشان دهید اگر G گرافی همبند مسطح با n رأس و $g \geq 3$ کمر g باشد، آنگاه $m(G) \leq \frac{g(n-2)}{g-2}$.

(ii) با استفاده از قضیه کوراتفسکی نشان دهید گراف مکمل ابر مکعب Q_3 نامسطح است.

۷. (i) فرض کنید G گرافی است که در آن هر دو دور فرد حداقل یک رأس مشترک دارند. نشان دهید $\chi(G) \leq 5$.

(ii) نشان دهید $\chi(G) \leq m$ اگر و تنها اگر $\alpha(G \square K_m) \geq n(G)$.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱۵	۱۵	۱۵	۱۰	۲۰	۱۵	۱۵

توزیع نمرات

۱. تمام اعداد $a \geq b \geq c$ را تعیین کنید چنان که دنباله $a + b + c, a + b, a + c, b + c, a, a, b, b, b, c, c, c$ دنباله درجات یک درخت باشد. متناظر هر یک از جواب‌هایی که به دست می‌آورید، یک درخت بسازید.

۲. قضیه Mader را بیان و اثبات کنید.

۳. نشان دهید درخت T دارای تطابق کامل است اگر و تنها اگر برای هر $v \in V(T)$ ، $o(T - v) = 1$.

۴. قضیه تات را بیان و اثبات کنید.

۵. نشان دهید برای هر گراف G ، $\delta(G) \leq \kappa'(G) \leq \kappa(G)$. نشان دهید هر یک از این نامساوی‌ها می‌تواند اکید باشد.

۶. گزاره‌های زیر را اثبات کنید یا با مثال نقضی رد کنید.

(i) هر گراف ۹ رأسی ۴-منتظم همبند است.

(ii) دقیقاً سه گراف ۸ رأسی ۴-منتظم غیریکریخت وجود دارد.

(iii) با حذف یک یال از یک گراف منتظم، تعداد مؤلفه‌های همبندی افزایش نمی‌یابد.

موفق باشید.