تمرین‌های نظریه اعداد ۹۴/۹/۱۷

۱- نشان دهید برای هر عدد اول فرد p، دقیقاً $\frac{1}{4}\left(p-4-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)$ زوج باقیمانده مربعی پشت سرهم وجود دارند. (مثلاً برای $p=13$، دو جفت باقیمانده مربعی پشت سرهم وجود دارند: $3,4$ و $9,10$).

۲- (i) فرض کنید $(a/p)=1$ که در آن p عددی اول به فرم $4k+3$ است. ثابت کنید جواب‌های معادله $x^2 \overset{p}{\equiv} a$ عبارتند از $\pm a^{k+1}$.

(ii) با استفاده از قسمت (i)، جواب‌های $x^2 \overset{59}{\equiv} 46$ و $9x^2-24x+13 \overset{59}{\equiv} 0$ را تعیین کنید.

۳- تعیین کنید آیا معادلات زیر جواب دارند یا خیر؟

(i) $42x^2-51x+91 \overset{311}{\equiv} 0$

(ii) $42x^2-51x+91 \overset{622}{\equiv} 0$

۴- آیا $83 \mid 2^{41}-1$ ؟ و $1999 \mid 2^{999}-1$ ؟

(راهنمایی: از محک اویلر استفاده کنید)

۵- آیا مربع کاملی به فرم $55k-1$ وجود دارد؟ چرا؟

۶- نشان دهید $1!+2!+\dots+n!$ هرگز یک مربع کامل نیست.

(راهنمایی: این عدد را در پیمانه ۵ در نظر بگیرید)