

بسمه تعالی

(۱) انتگرال معین  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  را محاسبه نمایید.

(۲) اگر  $f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 dt$ ، آنگاه ثابت کنید که  $|f(x)| \leq 1$ .

(۳) اشتباه محاسبات زیر را بیابید.

$$۱) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi} \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$۲) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(t) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{3} \quad (x = -\frac{1}{t})$$

(۴) الف) نشان دهید که برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

ب) مطلوبست مقدار  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ .

(۵) نشان دهید که برای هر عدد صحیح  $n$ ،  $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx = 0$ .

(۶) انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$$

$$۲) \int \sec^n x dx, \int \csc^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$۴) \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})(\sqrt{x-x^2})}$$

$$۵) \int \tan^m x \sec^n x dx \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$۶) \int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$۷) \int \ln(a^x + x^a) dx$$

$$۸) \int (\ln x)^2 dx$$

$$۹) \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$۱۰) \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} dx$$

$$۱۱) \int \frac{x}{\sqrt{(-x^2 + \sqrt{x-1})^2}} dx$$

$$۱۲) \int e^y \sqrt[2]{e^y} \sqrt[3]{e^y} dy$$

$$۱۳) \int \frac{dx}{e^x - 1}$$

۷) حدود زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \right)$$

$$۳) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n}}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x z e^z}{x^2}$$

$$۵) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} + 2e^{-\frac{2}{n}} + \dots + ne^{-1}}{n^2}$$

۸) مساحت محصور بین منحنی  $x = y^2 - 1$  و  $x = -y^2 + 1$  را بدست آورید.

۹) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ،  $(a > 0)$  را بیابید.

۱۰) طول منحنی فوق را بدست آورید.

۱۱) با انتگرال گیری حجم مخروط به ارتفاع  $h$  و شعاع قاعده  $r$  را بدست آورید.

۱۲) ناحیه محصور به منحنی  $y = \sqrt{x^3}$ ، محور  $x$ ها و خط  $x = 4$  را در نظر بگیرید. حجم حاصل از

دوران را در هر یک از موارد زیر بیابید:

الف) حول محور  $x$ ها (ب) حول محور  $y$ ها

ج) حول خط  $x = 4$  (د) حول خط  $y = 8$

۱۳) طول منحنی به معادلات پارامتری  $x = \frac{t^2}{6}$  و  $y = 4 - \frac{t^4}{4}$  محدود به محورهای مختصات را

بدست آورید.

۱۴) مساحت داخل دایره  $r = 5 \cos \theta$  و خارج منحنی  $r = 2 + \cos \theta$  را بدست آورید.

۱۵) انتگرال های ناسره زیر را محاسبه نمایید.

$$۱) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad ۲) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}} \quad ۳) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

۱۶) همگرایی یا واگرایی انتگرال های ناسره زیر را تعیین کنید.

$$۱) \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx \quad ۲) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$$

$$۳) \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx, \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (p > 0)$$

$$۴) \int_0^\infty \cos(x^2) dx \quad ۵) \int_0^\infty 2x \sin(x^4) dx$$

۱۷) انتگرال  $\int_1^\infty (\frac{x}{\sqrt{x^2+2c}} - \frac{c}{x+1}) dx$  به ازای یک مقدار حقیقی  $c$  همگرا است.  $c$  را تعیین کنید و

مقدار انتگرال را بیابید.

۱۸) اگر  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$  آنگاه مقدار  $\int_0^\infty (\frac{\sin x}{x})^2 dx$  را بدست آورید.

۱۹) در همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را بر حسب مقادیر مختلف  $\alpha$  تعیین کنید.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$$

- (۱) مساحت محصور بین منحنی  $y = \arcsin(x - 1)$ ، محورهای مختصات و خط  $y = 2$  را بیابید.
- (۲) مساحت محصور بین منحنی  $x = y^2 - 1$  و  $x = -y^2 + 1$  را بدست آورید.
- (۳) الف) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ،  $(a > 0)$  را بیابید.  
 ب) طول منحنی فوق را بدست آورید.
- (۴) با انتگرال گیری حجم مخروط به ارتفاع  $h$  و شعاع قاعده  $r$  را بدست آورید.
- (۵) ناحیه محصور به منحنی  $y = \sqrt{x^3}$ ، محور  $x$ ها و خط  $x = 4$  را در نظر بگیرید. حجم حاصل از دوران را در هر یک از موارد زیر بیابید:
- الف) حول محور  $x$ ها    ب) حول محور  $y$ ها
- ج) حول خط  $x = 4$     د) حول خط  $y = 8$
- (۶) طول منحنی به معادلات پارامتری  $x = \frac{t^7}{7}$  و  $y = 4 - \frac{t^4}{4}$  محدود به محورهای مختصات را بدست آورید.
- (۷) مساحت داخل دایره  $r = 5 \cos \theta$  و خارج منحنی  $r = 2 + \cos \theta$  را بدست آورید.
- (۸) حدود زیر را بیابید.