Problem Set 9

تمرین های درس ریاضی عمومی،شماره ۸

انتگرال های ناسره و کاربردهای انتگرال

۱) همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را تعیین کنید

۱) $\int_{۰}^{\infty} \frac{x}{(x^۲+۱)^۴}dx$ ۲) $\int_{۰}^{\infty} \frac{x^۳}{(x^۲+۱)^۶}dx$ ۳) $\int_{۰}^{\infty} \frac{x^۵}{(x^۲+۱)^۶}dx$

۲) مقدار انتگرال زیر را که در نظریه الکترومغناطیس کاربرد دارد، بیابید.

$$P = k\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{(a^۲+x^۲)^{۳/۲}}dx$$

۳) فرض کنید R ناحیه محدود به نمودار $y=\frac{۱}{x}$، محور x هاو خطوط $x=۱, x=b$ باشد. فرض کنید H جسم حادث از دوران R حول محور x باشد.

- V، حجم حادث از دوران H را به دست آورید.
- S، سطح حادث از دوران H را به دست آورید.
- حد V وقتی $b\to\infty$ را بیابید.
- حد S وقتی $b\to\infty$ را بیابید.

از مقایسه این دو حد چه نتیجه ای می توان گرفت؟

سطح حادث از دوران نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ وقتی که $x\in[۱,\infty)$ به شیپور گابریل موسوم است.

۴) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

- اگر f روی $[۰,+\infty)$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to\infty} f(x)=۰$ آنگاه $\int_{۰}^{\infty} f(x)dx$ وجود دارد.
- اگر f روی $[۰,+\infty)$ پیوسته باشد و $\int_{۰}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq ۰$.
- اگر f' روی $[۰,+\infty)$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to\infty} f(x)=۰$ آنگاه $\int_{۰}^{\infty} f(x)dx=-f(۰)$.
- اگرنمودار f نسبت به مبدا و محور y متقارن باشد آنگاه $\int_{۰}^{\infty} f(x)dx$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد.

۵) در تمرین های زیر با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء درستی تساوی ها را به اثبات برسانید

- $\int \sin^n x\ dx = -\frac{\sin^{n-۱} x\cos x}{n} + \frac{n-۱}{n}\int \sin^{n-۲} x dx$.
- $\int \cos^n x\ dx = \frac{\cos^{n-۱} x\sin x}{n} + \frac{n-۱}{n}\int \cos^{n-۲} x dx$.

- $\int \cos^m x \sin^n x \; dx = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x dx$
- $\int \sec^n x \; dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$.

۶) با استفاده از فرمول های فوق روابط زیر را ثابت کنید

- اگر n با $n \geq x$ یک عدد فرد باشد آنگاه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

- اگر n زوج باشد ($n \geq 2$) آنگاه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

۷) با استفاده ازجایگزاری توابع مثلثاتی و فرمول های والیس نشان دهید

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{2n} dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

موفق و سربلند باشید.
گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر