کلید آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی (۱)

① (i) ریشه‌های n ام عدد 2^n از ضرب عدد ۲ در ریشه‌های n ام واحد بدست می‌آیند. بنابراین این ریشه‌ها عبارتند از:

$$Z_k = 2e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\dots,n-1$$

۲ نمره

اگر $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}$، آنگاه $\omega \neq 1$ و ریشه‌های n ام واحد دقیقاً توان‌های ω هستند یعنی

$$\omega^0=1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1}$$

بنابراین

$$Z_0+\dots+Z_k = 2(1+\omega+\dots+\omega^{n-1}) = \frac{\omega^n-1}{\omega-1}=0$$

۲ نمره

(ii) با توجه به فرمول دموآور داریم:

$$A+iB=\sum_{k=0}^{n} x^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) = \sum_{k=0}^{n} (xe^{i\theta})^k$$

۲ نمره

مجموع فوق، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت $xe^{i\theta}$ است:

$$A+iB = \frac{(xe^{i\theta})^{n+1}-1}{xe^{i\theta}-1} = x^n\frac{\cos(n+1)\theta -1 + i\sin(n+1)\theta}{\cos\theta-1+i\sin\theta}$$

۲ نمره

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج داریم،

$$A=\frac{x^n}{2-2\cos\theta}\left(\cos(n+1)\theta\cos\theta+\sin(n+1)\theta\sin\theta\right)$$

$$B=\frac{x^n}{2-2\cos\theta}\left(\sin(n+1)\theta\cos\theta-\cos(n+1)\theta\sin\theta\right)$$

۲ نمره

② فرض کنید $N>0$ داده شده باشد. ابتدا بازه‌ای را تعیین می‌کنیم که روی آن $x+b$ از پایین دارای کران مثبت باشد.

اگر $|x-a|<\frac{a+b}{2}$ آنگاه

$$a+b-\frac{a+b}{2} < x+b < \frac{a+b}{2}+a+b \Rightarrow \frac{a+b}{2}<x+b<\frac{3}{2}(a+b)$$

۲ نمره

بنابراین اگر $|x-a|<\frac{a+b}{2}$، آنگاه $\frac{x+b}{(x-a)^2}>\frac{a+b}{2(x-a)^2}$.

برای اینکه سمت راست از N بزرگتر باشد کافی است $|x-a|<\sqrt{\frac{a+b}{2N}}$. لذا کافی است $\delta=\min\left\{\frac{a+b}{2},\sqrt{\frac{a+b}{2N}}\right\}$ اختیار کنیم تا شرط زیر برقرار شود:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \frac{x+b}{(x-a)^2}>N$$

و لذا حکم ثابت می‌شود.

۲ نمره

③ ابتدا با استقراء نشان می‌دهیم $a_n>\sqrt3$. برای $n=1$، داریم $a_1=3>\sqrt3$. فرض کنید $a_n>\sqrt3$، داریم:

$$a_{n+1}=\frac{3+3a_n}{3+a_n}>\sqrt3 \iff 3+3a_n>3\sqrt3+\sqrt3 a_n$$

$$\iff (3-\sqrt3)a_n>3\sqrt3-3 \iff a_n>\sqrt3$$

۲ نمره

حال نشان می‌دهیم $\{a_n\}$ نزولی است:

$$a_{n+1}<a_n \iff \frac{3+3a_n}{3+a_n}<a_n \iff 3+3a_n<3a_n+a_n^2 \iff 3<a_n^2$$

۲ نمره

پس $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و کران‌دار است. در نتیجه همگراست. اگر $l=\lim_{n\to\infty}a_n$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} \frac{3+3a_n}{3+a_n} \Rightarrow l=\frac{3+3l}{3+l}$$

$$\Rightarrow 3l+l^2=3+3l \xrightarrow{l>0} l=\sqrt3$$

۲ نمره

④ قرار دهید $g(x)=x^2f(x)$، تابع g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است و بنا بر فرض $g(a)=g(b)$. لذا بنا بر قضیه رل، c ای بین a و b وجود دارد که:

$$g'(c)=0 \Rightarrow 2cf(c)+c^2f'(c)=0 \xrightarrow{c>a>0} 2f(c)+cf'(c)=0$$

⑤ (i) حذف شد.

(ii) فرض کنید $f(x)=\sin^{-1}x$. در این صورت

$$f'(x)=(1-x^2)^{-1/2} \Rightarrow f''(x)=x(1-x^2)^{-3/2}$$

$$f'''(x)=(1-x^2)^{-3/2}+3x^2(1-x^2)^{-5/2}$$

$$f^{(4)}(x)=9x(1-x^2)^{-5/2}+15x^3(1-x^2)^{-7/2}$$

۲ نمره

لذا چندجمله‌ای تیلور درجه ۳ f حول ۰ عبارت است از:

$$P(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+f'''(0)\frac{x^3}{6} = x+\frac{x^3}{6}$$

۲ نمره

$$\Rightarrow \sin^{-1}x \approx P(x)=x+\frac{x^3}{6}$$

$$\frac{\pi}{6}=\sin^{-1}(1/2)\simeq \frac12+\frac16\left(\frac12\right)^3$$

۲ نمره

خطای تقریب: η ای وجود دارد که $0<\eta<\frac12$ که

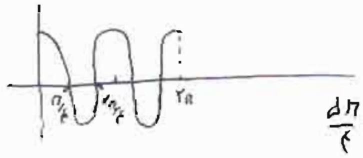
$$R=f^{(4)}(\eta)\,(1/2)^4$$

چون $f^{(4)}(x)$ تابعی صعودی لذا ماکسیمم مقدار خود را در بازه $[0, \frac{1}{2}]$ در $\frac{1}{2}$ اختیار می‌کند. بنابراین:

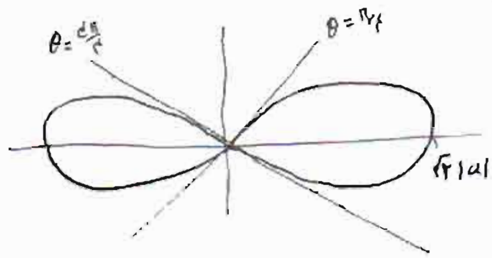
$$|R| \le f^{(4)}(1/2)(1/2)^4 = (\tfrac{1}{2})^4 \, 9(\tfrac{1}{2})(\tfrac{3}{2})^{-5/2} + 15(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{3}{2})^{-7/2}$$

۲/۵

(6) ابتدا نمودار کلی $y=\cos(2x)$ را رسم می‌کنیم:



چون $\cos(2x)$ به ازای $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$ منفی است لذا این بازه‌ها جزء دامنه نمی‌باشند. حال با توجه به تغییرات y نسبت به x در نمودار بالا، نمودار $r^2=2a^2\cos(2\theta)$ به صورت زیر خواهد بود:



(7) فرض کنید n عددی طبیعی باشد:

(ج)

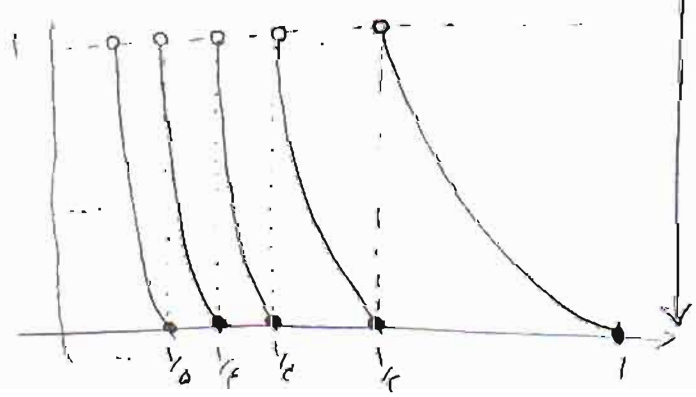
$$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n} \Rightarrow n\le\frac{1}{x}<n+1 \Rightarrow \lfloor\tfrac{1}{x}\rfloor=n$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}-n$$

بنابراین f را می‌توان به صورت زیر نوشت: لذا نمودار تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 & \frac{1}{2}<x\le 1\\ \frac{1}{x}-2 & \frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}-3 & \frac{1}{4}<x\le\frac{1}{3}\\ \vdots & \\ \frac{1}{x}-n & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\\ \vdots & \end{cases}$$

۲/۵



$$\lim_{x\to 1/n^+} f(x) = \lim_{x\to 1/n^+}\left(\frac{1}{x}-(n-1)\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 1/n^-} f(x) = \lim_{x\to 1/n^-}\left(\frac{1}{x}-n\right) = 0$$

بنابراین f در تمام نقاط به صورت $\frac{1}{n}$ حد ندارد و لذا در این نقاط ناپیوسته است. از طرفی اگر چون $f(x)$ روی بازه‌های $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ برابر $\frac{1}{x}-n$ است، در سایر نقاط پیوسته است. پس نقاط ناپیوستگی f عبارتند از:

۲/۵

$$\{\tfrac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$$

(22) اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ گنگ است و لذا $\frac{1}{x}-\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ گنگ است، یعنی $f(x)$ گنگ است. در نتیجه (با استقرا) داریم برای هر n، $f^{(n)}(x)$ گنگ است پس $f^{(n)}(x)\neq 0$.

۱/۵

حال با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که برای هر عدد گویا مثل $x=\frac{n}{m}$ که $m>n$، $f^{(n)}(x)=0$. اگر $n=1$، حکم از جهت مثل واضح است. فرض کنید $n>1$. عدد $x=\frac{n}{m}$ را در نظر بگیرید $m>n$. بنابر الگوریتم تقسیم q و r طبیعی وجود دارند که $m=qn+r$ و $0\le r<n$.

۲/۵

داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\lfloor\tfrac{1}{x}\rfloor = \frac{qn+r}{n}-\lfloor\frac{qn+r}{n}\rfloor = q+\frac{r}{n}-q=\frac{r}{n}$$

چون $r<n$، بنابر استقرا، $f^{r}(\frac{r}{n})=0$ در نتیجه:

$$f^{r+1}(x)=f(f^{r}(\tfrac{r}{n}))=f(0)=0$$

$$\overset{n\ge r+1}{\Longrightarrow} f^{n}(x)=0$$