کلید امتحان میان ترم ریاضی ۱ — آذر ۹۲

۱) ابتدا توجه کنید که اگر $a>1$، آنگاه $a+\frac{1}{a}>2$. (*)

به استقرا نشان می‌دهیم برای هر n، $x_n>1$.
بنابر فرض، حکم برای $n=1$ برقرار است. فرض کنید $x_k>1$. در این صورت: ۲ نمره

$$\frac{1}{x_k}<1 \Rightarrow 2-\frac{1}{x_k}>1 \Rightarrow x_{k+1}>1.$$

بنابر (*) داریم: ۲ نمره

$$x_n+\frac{1}{x_n}>2 \Rightarrow x_n>2-\frac{1}{x_n}=x_{n+1}.$$

لذا $\{x_n\}$ هم نزولی است و هم از پایین کران‌دار. بنابراین همگراست. ۱ نمره

---

۲) (i) با توجه به ضابطه f یعنی

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$$

داریم:

$$f(x)=\begin{cases}0 & |2\sin x|>1\\ \frac{x}{2} & |2\sin x|=1\\ x & |2\sin x|<1\end{cases}$$ ۲ نمره

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0 & k\pi+\frac{\pi}{6}<x<k\pi+\frac{5\pi}{6}\\ \frac{x}{2} & x=k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ k\pi+\frac{5\pi}{6}\\ x & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$ ۲ نمره

لذا نقاط ناپیوستگی f مجموعه زیر است: ۲ نمره

$$\{k\pi+\frac{\pi}{6}\ |\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{k\pi+\frac{5\pi}{6}\ |\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

(ii) به ازای هر $2\le k\le n$ داریم: ۷ نمره

$$1-x=(1-\sqrt[k]{x})(1+\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{x^2}+\dots+\sqrt[k]{x^{k-1}})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[k]{x}}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{x^2}+\dots+\sqrt[k]{x^{k-1}}}=\frac{1}{k}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$$

---

۳) با توجه به مفروضات مسئله، توابع f، f' و f'' بر بازه $[a,b]$ در شرایط قضیه رل صادق اند.
چون $f(a)=f(b)$، بنابر قضیه رل، $c_0\in(a,b)$ی وجود دارد که $f'(c_0)=0$. مجدداً بنابر قضیه رل: ۲ نمره

$$0=f'(a)=f'(c_0)\Rightarrow \exists c_1\in(a,c_0),\ f''(c_1)=0$$
$$0=f'(c_0)=f'(b)\Rightarrow \exists c_2\in(c_0,b),\ f''(c_2)=0$$ ۲ نمره

حال با اعمال مجدد قضیه رل برای f'' و نقاط c_1, c_2، نتیجه می‌شود که: ۲ نمره

$$\exists c\in(c_1,c_2),\ f'''(c)=0.$$

---

۴) چون f در (a,a) بر $y=x$ مماس است، داریم:

$$f(a)=a,\quad f'(a)=1.\quad (*)$$ ۲ نمره

با استقرا روی n نشان می‌دهیم $f^n(a)=a$ و $(f^n)'(a)=1$.
این حکم مسئله را ثابت می‌کند.

حکم بالا بنابر (*) برای $n=1$ درست است. فرض کنید حکم برای $n=k\ge1$ درست باشد، یعنی: ۲ نمره

$$f^k(a)=a,\ (f^k)'(a)=1$$
$$\Rightarrow f^{k+1}(a)=f(f^k(a))=f(a)=a$$

و بنابر قاعده زنجیری مشتق داریم: ۲ نمره

$$(f^{k+1})'(a)=(f\circ f^k)'(a)=f'(f^k(a))\cdot(f^k)'(a)$$
$$=f'(a)\cdot1=1$$

پس حکم برای $n=k+1$ نیز برقرار است و حل مسئله کامل می‌شود.

۵ (i)

$$y=(1+x)^{1/n} \Rightarrow y'=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} \Rightarrow y''=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{n}-2}$$

$$\Rightarrow y'''=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{n}-3}$$

$$\Rightarrow y(0)=1,\ y'(0)=\frac{1}{n},\ y''(0)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right),$$

$$y'''(0)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)$$

۲ نمره

لذا چندجمله‌ای تیلور درجه ۳ $y=(1+x)^{1/n}$ حول ۰ به صورت زیر است:

$$y(0)+y'(0)x+y''(0)\frac{x^2}{2!}+y'''(0)\frac{x^3}{3!}$$

$$=1+\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\frac{x^3}{6}.$$

۲ نمره

(ii) با توجه به محاسبات قسمت (i) با قرار دادن $n=3$،

چندجمله‌ای تیلور درجه دو تابع $y=\sqrt[3]{(x+1)}$ حول ۰ به صورت زیر است:

$$P_2(x)=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1/1}\approx P_2(0/1)=1+\frac{1}{30}-\frac{1}{900}.$$

۲ نمره

در مورد خطای این تقریب، بنابر قضیه تیلور $c\in(0,0/1)$ ای وجود دارد که:

$$\left|P_2(0/1)-\sqrt[3]{1/1}\right|=\left|y'''(c)\frac{(0/1)^3}{6}\right|=\left|\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(1+c)^{-\frac{8}{3}}\frac{(0/1)^3}{6}\right|$$

$$<\frac{10}{27}\cdot\frac{1}{6}\cdot 10^{-3}<10^{-4}$$

۲ نمره

۶ (i)

قرار دهید $t=\frac{1}{x}$. در این صورت:

$$y=\tanh^{-1}t \Leftrightarrow t=\tanh y=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$$

با ضرب صورت و مخرج در e^y داریم:

$$t=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow te^{2y}+t=e^{2y}-1$$

$$\Leftrightarrow te^{2y}-e^{2y}=-1-t$$

$$\Leftrightarrow e^{2y}(t-1)=-1-t \Leftrightarrow e^{2y}=\frac{1+t}{1-t}$$

$$\Leftrightarrow 2y=\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$\xRightarrow{t=1/x} y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1/x}{1-1/x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

۶ نمره

(ii) [هر مورد ۱٫۵ نمره]

تابع	$r=\sqrt{\theta}$	$r=\theta^2$	$r=1+2\cos\theta$	$r=2+\sin 4\theta$
نمودار	V	II	III	I

۷ (i)

$$z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{1+3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

۲ نمره

بنابراین ریشه‌های ششم z عبارتند از:

$$z_k=e^{\frac{2k\pi+2\pi/3}{6}i},\quad k=0,1,\dots,5$$

$$\Rightarrow z_0=e^{i\pi/9},\ z_1=e^{i\frac{4\pi}{9}},\ z_2=e^{i\frac{7\pi}{9}}$$

$$z_3=e^{i\frac{10\pi}{9}},\ z_4=e^{i\frac{13\pi}{9}},\ z_5=e^{i\frac{16\pi}{9}}$$

۲ نمره

(ii) بنابر بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$$

۱ نمره

اگر قرار دهیم $z=\cos\theta+i\sin\theta$، بنابر قضیه دوموآور داریم $z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$. در نتیجه:

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos k\theta+i\sin k\theta)$$

لذا قسمت موهومی $(1+z)^n$ برابر است با: $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin k\theta=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\theta$.

۲ نمره

از طرف دیگر داریم:

$$1+z=1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (1+z)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

پس قسمت موهومی $(1+z)^n$ برابر است با $2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$، این حکم را اثبات می‌کند.

۵ نمره