## ۱- بررسی چند نوع معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی

یک معادله دیفرانسیل معمولی معادله ای است که در آن متغیر مستقل، تابع ( تابع یک متغیره) و مشتقات تابع نسبت به متغیر وجود دارد.

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی معادله ای است شامل متغیر های مستقل ، تابع ( تابعی با بیش از یک متغیر) و مشتقات جزیی تابع نسبت به متغیر های مستقل.

در بررسی پدیده های طبیعی و فیزیکی به مدلسازی پدیده پرداخته می شود. اگر پدیده ه تنها به یک متغیر وابسته باشد، مدل ریاضی آن یک معادله دیفرانسیل معمولی خواهد بود، اما چون اکثر پدیده های به بیش از یک متغیر وابسته اند، مدل ریاضی آنها یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی است. مدل ریاضی مسائلی در مکانیک سیالات، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیسی و هم چنین مسائلی در ارتباط با اپیدمی ها( برای مثال.....)و جریان ترافیک و تحلیل های اقتصادی به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی است.

مثال ۱:

فرض کنیم $u$ تابعی از دو یا تعداد بیشتری متغییر $t$ (زمان)، $y, x$ باشد. در این مثال به معرفی و مطالعه چند معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی می پردازیم:

۱- معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.1)$$

۲- معادله موج دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2.1)$$

۳- معادله گرما ی یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (3.1)$$

۴- معادله گرمای دوبعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (4.1)$$

۵- معادله لاپلاس دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (5.1)$$

۶- معادله لاپلاس در مختصات قطبی

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = 0 \qquad (6.1)$$

۷- معادله پوآسن دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad (7.1)$$

عبارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ در بیشتر معادلات فوق ظاهر شده است. به این عبارت لاپلاسین $u$ گفته می شود و با $\nabla^2 u$ و یا $\Delta u$ نشان داده می شود.

**مرتبه** یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه بالاترین مرتبه مشتق جزیی ظاهر شده در معادله است.

معادله دیفرانسیل را **خطی** گویند اگر تابع مجهول و مشتقات جزیی در آن همه از درجه یک باشند و حاصلضرب تابع در مشتقات و یا مشتقات در مشتقات نیز در معادله ظاهر نشوند، در غیر این صورت معادله را **غیر خطی** گویند. معادلات دیفرانسیل فوق همگی خطی و مرتبه دوم هستند. اما معادله دیفرانسیل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \qquad (8.1)$$

خطی نیست، زیرا جمله $u\frac{\partial u}{\partial x}$ در معادله ظاهر شده است.

در حالت کلی می توان یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی مرتبه دوم از دو متغیر را به صورت زیر نشان داد:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \qquad (9.1)$$

که در آن $A, B, C, E, F, G$ توابعی از دو متغیر $x, y$ هستند. معادله را **همگن** گویند اگر $G = 0$ ، در غیر این صورت معادله را غیر همگن گویند. در تمام قسمت های بعد فرض می کنیم که مشتقات آمیخته تابع $u$ از هر مرتبه ای با هم مساویند( برای مثال $u_{xy} = u_{yx}, u_{xxy} = u_{xyx} = u_{yxx}$ و غیره.) تمام معادلات دیفرانسیل فوق به جز معادله پوآسن معادلات خطی مرتبه دوم همگن هستند.

در مدلسازی یک پدیده فیزیکی اغلب معادله دیفرانسیل با مجموعه ای از معادلات دیگر ظاهر می شود که رفتار جواب را در مرزهای ناحیه مورد نظر نشان می دهد. به این معادلات **شرایط مرزی** گفته می شود. معادله دیگری که برای تشریح یک پدیده فیریکی ظاهر می شود مقدار اولیه در لحظه $t = 0$، یا **شرط اولیه** است. به معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی همراه با شرایط مرزی و شرایط اولیه یم مسئله مقدار اولیه – مرزی و یا به طور ساده مسئله مقدار مرزی می گویند.

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \qquad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

این یک نمونه از یک مسئله مقدار مرزی- اولیه است. ابتدا جواب عمومی مسئله را به دست می آوریم و سپس شرط اولیه را برای پیدا کردن جواب خاص به کار می بریم. باید دقت شود که **جواب عمومی نه تنها به خود معادله بلکه به شرایط مرزی بستگی دارد.** به عبارت دیگر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی دارای جوابهای عمومی متفاوتی است که با استفاده از شرایط مرزی متفاوت به دست می آید.

اگر شرایط مرزی روی $u$ داده شود ، یعنی$u(0,t) = f(t), u(l,t) = g(t)$ آنگاه شرایط را **شرایط دیریکله** گویند.

اگر شرایط مرزی روی مشتقات داده شوند، یعنی

$$u_x(l,t) = g(t),\ u_x(0,t) = f(t)$$

این شرایط را **شرایط نیومن** گویند.

اگر شرایط مرزی روی ترکیبی از $u$ و مشتق آن داده شود ، یعنی:

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = f(t),\ \ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = g(t)$$

آنگاه شرایط را **شرایط روبین** گویند.

این سه حالت مهمترین شرایط مرزی است. اگر شرایط مرزی مشخص شده برابر با صفر باشد آنگاه به آنها شرایط همگن گویند.

## ۲- بررسی پدیده های فیزیکی

بررسی پدیده های فیزیکی شامل دو قسمت می باشد

۱- مدلسازی مسئله و تشکیل معادله حاکم بر رفتار پدیده

۲- حل معادله با استفاده از شرایط حاکم بر آن

تعدادی از پدیده های فیزیکی مدلسازی شده اند، ولی در حالت کلی برای مدلسازی مسئله بایستی قوانین فیزیکی حاکم بر پدیده را در نظر گرفت. مدل ریاضی پدیده های فیزیکی و طبیعی بسته به پیچیدگی پدیده ممکن است به معادلات مختلفی از قبیل معادله دیفرانسیل با مشتق جزیی، معادلات انتگر الی و یا ....تبدیل گردد.

اکنون به مدلسازی معادله موج یک بعدی می پردازیم

### ۲-۱ مدلسازی معادله موج در حالت یک بعدی

یک تار کشسان که دو انتهای آن در دو نقطه ثابت شده ، مانند یک سیم گیتار، را در نظر بگیرید. در لحظه ای که آنرا لحظه $t = 0$ می نامیم با ایجاد یک ضربه روی تار یک جابجایی کوچک در آن ایجاد می کنیم و سپس تار رها می شود تا در صفحه ارتعاش نماید. فرض می کنیم که $u(x,t)$ حرکت تار را در صفحه $xu$ در لحظه $t$ در نقطه ای به طول $x$ نشان می دهد. در حالت خاص $u(x,0)$ شکل اولیه تار را نشان می دهد. می خواهیم تابع $u = u(x,t)$ را به عنوان وضعیت تار در لحظه $t > 0$ (ثابت) و به ازا هر $0 < x < l$ محاسبه می کنیم. $u(x,t)$ را تابع مکان تارمی نامیم. در اینجا فرض می کنیم که:

۱- تار دارای دانسیته طولی ثابت باشد، به عبارت دیگر تار از جنسی همگن است.

۲- تار کاملا کشسان است و در مقابل کشش مقاومتی از خود نشان نمی دهد.

۳- ارتعاشات تار بسیار کوچک بوده و در صفحه $xu$ در امتداد قائم انجام می شود.

٤- فرض می کنیم هیچ نیروی خارجی روی تار اعمال نمی شود و فرض می کنیم که وزن تار در مقایسه با کشش ایجاد شده در تار قابل صرفنظر کردن باشد. بنابراین در اولین تجربه، تنها نیروی موثر روی تار نیروی کشش است.

فرض کنیم $T$ نمایشگر قدرمطلق کشش در حالت تعادل باشد. این کشش در تمام نقاط تار یکسان است و چون تغییر در طول تار در هنگام حرکت آن قابل صرفنظر کردن است، می توان فرض کرد که کشش در طول ارتعاش ثابت است. همچنین چون دو انتهای تار بسته شده است، کشش در هر نقطه به صورت مماس اثر می کند. اکنون قطعه ای از تار واقع بین دو نقطه $B, A$ با طولهای $x$ ,$x + \Delta x$ را در نظر بگیرید. با به کار بردن قانون دوم نیوتن ، نیرو های وارد بر این قطعه تار در اثر کشش برابر است با حاصلضرب شتاب مرکز ثقل این قطعه در جرم آن. این رابطه یک معادله برداری است. مولفه عمودی آن برابر است با:

$$T(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta) - T(x,t)\sin(\theta) = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \quad (1.2)$$

که در ان $\bar{x}$ مرکز جرم این قطعه تار و $T(x,t) = |\boldsymbol{T}(x,t)|$ است.

از طرفی چون فرض بر این است که تار در امتداد افقی هیچ گونه حرکتی ندارد، بنابراین مجموع نیرو های وارد بر این قطعه برابر با صفر است:

$$-T(x,t)\cos(\theta) + T(x+\Delta x,t)\cos(\theta+\Delta\theta) = 0, \qquad (2.2)$$

بنابراین:

$$T(x+\Delta x,t)\cos(\theta+\Delta\theta) = T(x,t)\cos(\theta) = k, \qquad (3.2)$$

طرفین معادله (1.2) را بر (3.2) تقسیم می کنیم:

$$\frac{T(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta) - T(x,t)\sin(\theta)}{k} = \frac{\rho}{k}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \qquad (4.2)$$

$$\frac{T(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta)}{T(x+\Delta x,t)\cos(\theta+\Delta\theta)} - \frac{T(x,t)\sin(\theta)}{T(x,t)\cos(\theta)} = \frac{\rho}{k}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \qquad (5.2)$$

$$\tan(\theta+\Delta\theta) - \tan(\theta) = \frac{\rho}{k}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t), \qquad (6.2)$$

چون $\tan(\theta+\Delta\theta)$ و $\tan(\theta)$ به ترتیب شیب خطوط مماس بر منحنی $u(x,t)$ را نقاط $(x+\Delta x,t)$ و$(x,t)$ می باشد.در نتیجه،

$$\tan(\theta+\Delta\theta)=\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x},\qquad \tan(\theta)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\qquad (7.2)$$

با استفاده از روابط $(6.2)$ و $(7.2)$ و تقسیم طرفین $(4.2)$ بر$\Delta x$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}=\frac{\rho}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x},t),\qquad (8.2)$$

با میل دادن $\Delta x$ به سمت صفر رابطه $(8.2)$ به صورت زیر خواهد بود:

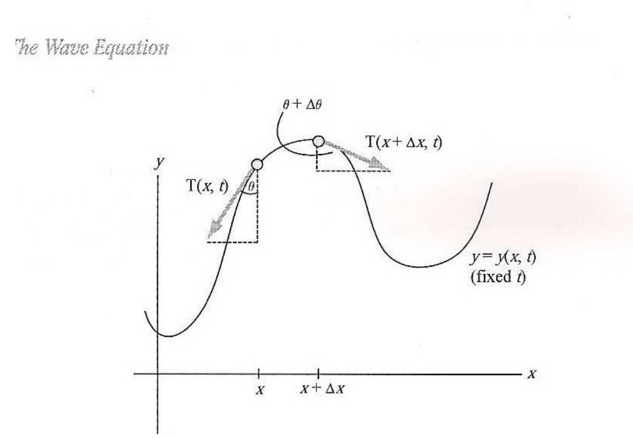
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\rho}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),\qquad (9.2)$$

با قرار دادن $c^2=\frac{k}{\rho}$ معادله اصلی موج به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad (10.2)$$

چون فرض شده که دو انتهای تار در تمام لحظات ثابت باشد، شرایط مرزی به صورت زیر خواهند بود:

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t\ge 0,\qquad (11.2)$$




شکل(۱,۱)

شرایط اولیه مسئله تغییر مکان اولیه تار، و سرعت اولیه ی تار، سرعتی است که تار در لحظه $t = 0$ با آن رها می شود،  به صورت زیر معرفی می شود.

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$g, f$ توابعی مفروض هستند که در شرایط خاصی صدق می کنند. برای مثال اگر تار در دو انتها ی خود ثابت باشد تابع مکان اولیه باید در شرط زیر صدق کند:

$$f(0) = f(l) = 0$$

اگر سرعت اولیه صفر باشد ، $g(x) = 0$.

معادله موج همراه با شرایط اولیه و مرزی یک **مسئله مقداراولیه - مرزی** برای تابع $u(x,t)$ را تشکیل می دهد. این اطلاعات برای تعیین جواب $u(x,t)$ به صورت یکتا کافی است.

**ارتعاش تحت تاثیر یک نیروی خارجی**

اگر علاوه بر ضربه اولیه ارتعاشات تار تحت تاثیر نیروهای خارجی نیز قرار داشته باشُد مثلا فرض کنیم $F(x,t)$ مقدار نیروی وارد بر یک واحد طول در امتداد محور $u$ ها باشد. در این حالت برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی  بایستی جمله  $F(x,t)\Delta x$ به سمت چپ رابطه (6.2) اضافه شود. در این صورت نظیر بحث های انجام شده در قسمت قبل معادله ارتعاش تار تحت تاثیر نیروهای خارجی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(x,t)}{\rho}, \qquad (12.2)$$

دو حالت خاص رابطه (12.2) جالب است. وقتی نیروی خارجی نیروی جاذبه  $g$ باشد. در این صورت معادله (12.2) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g \qquad (13.2)$$

حالت دیگر وقتی که نیروی خارجی نیروی مقاومت متناسب با سرعت لحظه ای(ارتعاش تار در یک سطح سیال) باشد. در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mathrm{k}\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (14.2)$$

که در آن $k$ مقدار ثابت است.

حالت دیگری از مسئله وقتی است که دو انتهای تار در حال ارتعاش باشد. در این حالت شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(0,t) = p(t), \quad u(l,t) = q(t)$$

در فضای دوبعدی معادله موج به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (15.2)$$

این معادله جابجایی عمودی $u(x,y,t)$ یک پوسته را نشان می دهد. برای مثال ارتعاشات سطح یک طبل.

در این قسمت هم باید شرایط اولیه و شرایط مرزی داده شوند تا یک جواب یکتا به دست آید. معمولا تابع جواب روی مرز ثابت است( لبه سطح طبل) بنابراین در نقاط مرزی جابجایی نخواهیم داشت. به ازا هر $(x,y)$ روی مرز و به ازا هر $t \geq 0$ داریم:

$$u(x,y,t) = 0$$

به علاوه باید سرعت اولیه و جابجایی اولیه داده شوند، این شرلیط به صورت زیر خواهند بود:

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y)$$

که در آن $g,f$ توابعی معلومند.

ما همچنین این امکان را داریم که از معادله موج دو بعدی در مختصات قطبی استفاده کنیم. برای به دست آوردن معادله موج در دستگاه قطبی از روابط بین مختصات کارتزین و قطبی استفاده می کنیم:

$$x = rcos(\theta), \quad y = rsin(\theta)$$

بنابراین:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

قرار دهید:

$$u(x,y) = u\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) = U(r,\theta)$$

محاسبه می کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{x}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right) + \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

با روش مشابهی می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

از جمع این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

بنا براین معادله موج دو بعدی در مختصات قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right), \qquad (16.2)$$

که در آن $U(r,\theta,t)$ جابجایی عمودی نقطه $(r,\theta)$ واقع روی پوسته در صفحه $xy$ در زمان $t$ را نشان می دهد.

در ادامه مسائل مقدار مرزی شامل معادله موج را با روشهای مختلف حل خواهیم کرد.

## مسائل بخش 2

۱- فرض کنید $u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos(\frac{n\pi c}{l}t)$. نشان دهید به ازا هر عدد مثبت $n$ تابع $u_n(x,t)$ در معادله موج یک بعدی صدق می کند.

۲- نشان دهید $u_{nm}(x,y,t) = \sin(nx)\cos(my)\cos(\sqrt{n^2+m^2}ct$ به ازائ هر $m,n$ صحیح مثبت در معادله موج دو بعدی صدق می کند.

۳- فرض کنید $f$ یک تابع دو بار مشتق پذیر یک متغیره باشد. نشان دهید تابع

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$

در معادله موج یک بعدی صدق می کند.

۴- نشان دهید تابع $u(x,t) = \sin(x)\cos(ct) + \frac{1}{c}\cos(x)\sin(ct)$ در معادله موج یک بعدی و شرایط مرزی و شرایط اولیه زیر صدق می کند:

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = \frac{1}{c}\sin(ct), \quad t > 0$$

$$\mathrm{u(x,0) = \sin(x)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(x), \qquad 0 < x < 2\pi$$

۵- مسئله مقدار اولیه - مرزی (معادله مشتق جزیی و شرایط مرزی و اولیه) را برای ارتعاش یک پوسته مستطیل شکل که ناحیه $0 \le x \le a$ ,$0 \le y \le b$ را اشغال می کند فرمولبندی کنید، در صورتی که انحراف اولیه پوسته با ضابطه $f(x,y)$ و سرعت اولیه (در زمان صفر) با ضابطه $g(x,y)$ نشان داده شود ودر تمام لحظات پوسته روی مرزهای ناحیه ثابت و بدون حرکت باشد.

۶- فرمول های مربوط به مسئله مقدار مرزی - اولیه را برای حرکت تار کشسانی به طول $l$ که در دو انتها ثابت شده و بعد از قرار دادن آن در وضعیت اولیه $f(x)$ رها می شود تا در صفحه $xy$ ارتعاش کند بنویسید . مقاومت هوا که قدرمطلق آن در هر نقطه متناسب با مربع سرعت در آن نقطه است با حرکت سیم مقابله می کند.

۷- معادله موج در فضای سه بعدی در مختصات کروی را بنویسید. به خاطر داشته باشید که روابط بین مختصات کروی و مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi),\quad y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), z = \rho\cos(\varphi)$$

که در آن $\rho$ فاصله مبدا تا نقطه $(x, y, z)$، $\theta$ زاویه بین جهت مثبت محور $x$ ها و تصویر شعاع حامل (تصویر خط واصل بین مبدا تا نقطه $(x, y, z)$ )، روی صفحه مختصات و $\varphi$ کوچکترین زاویه بین جهت مثبت محور $z$ ها و شعاع حامل است که از سمت محور $z$ ها به سمت شعاع حامل اندازه گیری می شود.

ابتدا به حل معادله موج و معادله انتقال حرارت در یک بازه بسته $[0, l]$ با روشهای متفاوت می پردازیم.در ابتدا با مسئله ساده ای شروع می کنیم و سپس حالت های پیچیده تررا بررسی می کنیم. در مرحله اول برای حل مسئله از روش جداپذیری و سپس از روش تبدیلات استفاده خواهیم کرد.

**ارتعاش تار با سرعت اولیه صفر**

یک تار کشسان به طول $l$ را در نظر بگیرید در حالت اول ساده ترین حالت را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که دو انتهای آن روی محور $x$ ها در دو نقطه $x = 0 \quad x = l,$ بسته شده است. در ابتدا که آن را لحظه $t = 0$ می نامیم یک تغییر مکان اولیه در تار ایجاد کرده و آن را بدون سرعت اولیه رها می کنیم تا در صفحه $xu$ ارتعاش نماید. می خواهیم در لحظه $t$ ثابت تابع تغییر مکان $u(x, t)$ را به عنوان تابعی تنها از $x$ به دست آوریم که نمودار آن یک منحنی روی صفحه $xu$ را نشان می دهد و وضعیت تار را در لحظه $t$ نشان می دهد.

مدل ریاضی مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad 0 < x < l,\quad t > 0\qquad (17.2)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad t>0 \qquad (18.2)$$

$$u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le l \quad (19.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad 0\le x\le l \quad (20.2)$$

نمودار $f(x)$ مکان تار را درلحظه $t=0$ ، قبل از رها شدن نشان می دهد.

**<u>حل مسئله موج یک بعدی با شرایط مرزی – اولیه داده شده</u>**

برای حل مسئله دو روش حل را دنبال می کنیم:

۱- روش فوریه یا روش جداپذیری یا روش تفکیک متغیر ها
۲- روش تبدیلات، تبدیلات فوریه و تبدیلات لاپلاس

**روش فوریه** یا **روش جداپذیری** یا **روش تفکیک متغیرها** سعی می کند جوابی برای مسئله به صورت $u(x,t)=X(x)T(t)$ بیابد. البته جواب تمام معادلات دیفرانسیل را نمی توان به صورت حاصل ضرب توابع با متغیر های مجزا بیان کرد، ولی معادلاتی که در این درس مورد مطالعه قرار می گیرند چنین خاصیتی دارند که جواب آنها به صورت ترکیب خطی چنین توابع با متغیر های جدا از هم می باشند. بنابراین سعی می کنیم تمام چنین جوابهایی با متغیرهای مجزا را یافته و سپس جواب عمومی معادله را بیابیم.

جوابی به صورت $u(x,t)=X(x)T(t)$ را در نظر گرفته و در معادله قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$XT''=c^2X''T \qquad (21.2)$$

طرفین رابطه را بر $c^2XT$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{c^2T}$$

طرف چپ این معادله تنها به $x$، و سمت راست آن تنها به $t$ وابسته است. چون $x,t$ متغیر های مستقل از یک دیگر هستند در نتیجه این نسبت نمی تواند به هیچ یک از این دو متغیر وابسته باشد و باید مقداری ثابت باشد. این مقدار ثابت را با $k$ نشان می دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2T} = k$$

بنابراین داریم:

$$X'' - kX = 0, \quad T'' - kc^2T = 0 \qquad (22.2)$$

یعنی معادله موج به دو معادله دیفرانسیل معمولی تفکیک شده است.

حالا شرایط مرزی را در نظر می گیریم. ابتدا داریم:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \qquad (23.2)$$

در این رابطه اگر به ازا هر $t$ داشته باشیم $T(t) = 0$ ، در نتیجه

$$u(x,t) = 0 \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l \qquad (24.2)$$

این جواب مسئله خواهد بود اگر و تنها اگر $f(x) = 0$. در واقع این به این معنی است که هیچ گونه ارتعاش و حرکتی در تار ایجاد نشده است و همواره بدون حرکت روی محور قرار دارد. به همین دلیل اگر نه نیروی خارجی روی تار اثر کند و نه تحت تاثیر سرعت اولیه قرار گیرد در تمام لحظات تار ثابت باقی می ماند.

بنابراین با شرایط داده شده در این مسئله بایستی که $T(t) \neq 0$. در نتیجه از این شرط مرزی نتیجه می شود که

$$X(0) = 0 \qquad (25.2)$$

متشابها از شرط مرزی دیگر نیز نتیجه می شود که:

$$u(l,t) = 0 \;\; => X(l)T(t) = 0 \;\; => X(l) = 0 \qquad (26.2)$$

بنابراین دو شرط روی تابع $X(x)$ وجود دارد و مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$X'' - kX = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \qquad (27.2)$$

به دنبال مقادیری از $k$ هستیم تا جواب مخالف صفر برای مسئله به دست آوریم. چند حالت در نظر می گیریم:

$$k > 0, \quad k = 0 \quad k < 0,$$

در حالت اول فرض می کنیم که $k > 0$. بدون انکه خللی به کلیت امر وارد شود قرار می دهیم:

$$k = p^2, \quad p > 0$$

بنابراین معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$X'' - p^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \; X(l) = 0 \qquad (28.2)$$

جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px} \qquad (29.2)$$

با اعمال شرایط $X(0) = 0, \; X(l) = 0$ روی تابع فوق خواهیم داشت:

$$X(x) = 0 \qquad (30.2)$$

یعنی تنها جواب این معادله با شرایط داده شده تابع صفر است که قابل قبول نمی باشد.

در حالت دوم قرار می دهیم $k = 0$. در نتیجه معادله با شرایط داده شده روی تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$X''(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \qquad (31.2)$$

جواب معادله به صورت خطی خواهد بود.

$$X(x) = ax + b \qquad (32.2)$$

بعد از اعمال شرایط فوق روی تابع به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$X(x) = 0 \qquad (33.2)$$

بنابراین در این حالت نیز جواب قابل قبولی به دست نمی آید.

حالت سوم $k < 0$ در این حالت هم بدون آنکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم

$k = -p^2, \quad p > 0$. در نتیجه داریم:

$$X'' + p^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \; X(l) = 0 \qquad (34.2)$$

این یک مسئله اشترم لیویل است. یعنی به دنبال مقادیری از $p$ هستیم که به ازا آن جواب مخالف صفری برای تابع $X(x)$ به دست آید. از حل معادله خواهیم داشت:

$$X(x) = Acos(px) + Bsin(px) \qquad (35.2)$$

با استفاده از اولین شرط روی تابع نتیجه می شود، $A = 0$. با استفاده از دومین شرط خواهیم داشت:

$$Bsin(pl) = 0 \qquad (36.2)$$

در این رابطه اگر بتوان برای $p$ مقادیری یافت که $sin(pl) = 0$ در این صورت هم شرایط مسئله بر قرار خواهد بود و ضمنا تابع جواب صفر نخواهد شد.

$$sin(pl) = 0 \quad => sin(pl) = \sin(n\pi) \qquad (37.2)$$

$$=> pl = n\pi, \quad n = 1,2,\dots, \quad p = \frac{n\pi}{l} \qquad (38.2)$$

در نتیجه داریم:

$$X(x) = Bsin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1,2,\dots$$

به $p$ **مقدار ویژه** و به تابع $X(x)$ متناظر آن **تابع ویژه** مسئله گویند.

دقت کنید که در این جا ضریب $B$ می تواند هر عدد مخالف صفر باشد. برای راحتی قرار می دهیم $B = 1$ . از طرفی چون در معادله فوق سمت راست رابطه به پارامتر $n$ وابسته است پس سمت چپ نیز وابسته به $n$ خواهد شد.

$$X_n(x) = sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1,2,\dots \,(39.2)$$

حالا به محاسبه $G(t)$ برمی گردیم. چون معادله از حالت سکون رها شده است،

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \quad => X(x)T'(0)=0 => T'(0)=0 \qquad (40.2)$$

معادله برای تابع$T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$T''(t)+c^2KT(t)=0,\ \ T'(0)=0 \qquad (41.2)$$

که در آن

$$K=-p^2=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

بنابراین

$$T''(t)+c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T(t)=0,\ \ T'(0)=0 \qquad (42.2)$$

در نتیجه داریم:

$$\mathrm{T(t)}=A_n\cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)+B_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \qquad (43.2)$$

$$T'(0)=B_n\frac{cn\pi}{l}=0 \quad => \quad B_n=0 \qquad (44.3.1)$$

در نتیجه به ازا هر عدد صحیح مثبت $n$ و هر ثابت مجهول $A_n$ ،

$$T(t)=T_n(t)=A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \qquad (45.2)$$

اکنون به ازائ هر عدد صحیح مثبت $n$ توابعی به صورت زیر داریم:

$$u_n(x,t)=A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (46.2)$$

هر یک از این توابع در معادله موج و در شرایط مرزی ، و در شرط اولیه $u_t(x,0)=0$ صدق می کند. به هریک از $u_n(x,t)$ ها یک مد ارتعاش گویند. در رابطه (46.2) اگر$u_n(x,t)$ را به ازا $t$ ثابتی به عنوان

تابعی تنها از $x$ در نظر بگیریم $u_n(x,t)$ تابعی سینوسی خواهد بود و تابع $T_n(t)$ دامنه آن است. دامنه $T_n(t)$ با زمان تغییر می کند.

سوال: آیا روی تار نقاطی وجود دارند که د ر هیچ لحظه ای هیچ گونه حرکت و ارتعاشی نداشته باشند؟

برای انکه نقاطی را بیابیم که به ازا هر $t$ مقدار ارتعاش برابر با صفر باشد باید داشته باشیم:

$$u_n(x,t) = A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \quad => \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0$$

$$\frac{n\pi}{l}x = k\pi \quad => x = k\frac{l}{\pi}, \quad k = 1,2,\dots,n-1$$

بنابراین در نقاط $x = \frac{l}{\pi}, \frac{2l}{\pi}, \dots, \frac{(n-1)l}{\pi}$ که گره نامیده می شوند در هیچ لحظه ارتعاشی وجود ندارد، یعنی $u_n$ در $n-1$ نقطه به غیر از نقاط انتهایی دارای گره است. گره ها در تمام لحظات ثابت هستند . به ازا $n = 1$ به $u_1(x,t)$ مد اصلی ارتعاش گویند.

رابطه (46.2) در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کند. ولی لازم است که شرط $u(x,0) = f(x)$ نیز برقرار باشد. اگر به ازا ی $m$، $f(x) = Ksin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ در این صورت

$$u(x,t) = Ksin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)cos\left(\frac{cn\pi t}{l}\right) \qquad (47.2)$$

جواب است. اما لزومی ندارد که همواره $f(x)$ به این صورت تعریف شود. برای مثال اگر از ابتدا تار از وسط به طرف بالا کشیده شود، تابع تغییر مکان اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \qquad (48.2)$$

در این صورت شرط $u(x,0) = f(x)$ هیچوقت به ازا یکی از $u_n(x,t)$ برقرار نخواهد بود، حتی اگر تلاش کنیم از ترکیب تعداد متناهی از $u_n(x,t)$ ها استفاده کنیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N} A_n u_n(x,t) \qquad (49.2)$$

نمی توانیم $A_n, \dots, A_2, A_1$ را طوری بیابیم تا $u(x,t)$ در رابطه $u(x,0)=f(x)$ صدق کند.، زیرا هر تابع $f(x)$ را نمی توان به صورت مجموع تعداد متناهی از توابع سینوسی نوشت. در چنین حالاتی به دلیل همگن بودن معادله اصلی و خاصیت خطی بودن معادله از خاصیت برهمنهی نامتناهی استفاده کنیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (50.2)$$

در این حالت شرط $\mathrm{u(x,t)=f(x)}$ برقرار است، اگر ضرایب را طوری انتخاب کنیم که:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (51.2)$$

رابطه (51.2) بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)$ را نشان می دهد که روی بازه $[-l,l]$ گسترش فرد یافته است. اگر

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\varphi) sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right)d\varphi \qquad (52.2)$$

بنابراین :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(\alpha) sin\left(\frac{n\pi}{l}\alpha\right)d\alpha\right) cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (53.2)$$

این روش برای حالتی که تابع تغییر مکان اولیه $f(x)$ روی بازه $[0,l]$ تابعی پیوسته و دارای مشتق تکه ای پیوسته باشد و $f(0)=f(l)=0$ قابل کاربرد است. این شرایط تضمین می کند که تابع $f(x)$ روی بازه $[0,l]$ به $f(x)$ همگراست.

رابطه (53.2) را می توان به صورت دیگری هم نشان داد. با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}x+\frac{cn\pi}{l}t\right)+sin\left(\frac{n\pi}{l}x-\frac{cn\pi}{l}t\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right]$$

درنتیجه داریم

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\qquad(54.2)$$

اگر به معادله $(54.2)$ دقت کنیم مشاهده می کنیم که از دو معادله مشابه معادله $(51.2)$ تشکیل شده است که فقط در زاویه با هم اختلاف دارند. به عبارت دیگر :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]\qquad(55.2)$$

که در آن $f^*$ گسترش فرد تابع $f$ بر بازه $[-l,l]$ و تابعی متناوب با دوره تناوب $2l$ است.

دقت کنیم که $f^*(x+ct)$ همان $f^*(x)$ است که به اندازه $ct$ به سمت چپ انتقال داده شده است و $f^*(x-ct)$ انتقال تابع $f^*(x)$ به سمت راست به اندازه $-ct$ است. یعنی موجهای $f^*(x+ct)$ و $f^*(x-ct)$ موجهایی هستند که به سمت چپ و راست در حال حرکت می باشند. به این امواج موجهای پیشرو و پسرو و یا موجهای رونده می گویند.

### ارتعاش نخ با سرعت اولیه مفروض و تغییر مکان اولیه صفر

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که تار از وضعیت افقی خود (تغییر مکان اولیه صفر) با سرعت اولیه مفروضی ، مثلا $g(x)$ ، رها شود. مسئله مقدار مرزی برای تابع تغییر مکان عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad (56.2)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad (57.2)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad (58.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad (59.2) \quad 0 \leq x \leq l$$

مانند قبل با تفکیک متغیر ها شروع می کنیم. قرار دهید $u(x,t) = X(x)T(t)$. چون معادله اصلی و شرایط اولیه نظیر حالت قبل است در نتیجه خواهیم داشت:

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0$$

ادامه بحث کاملا مشابه بحثی است که در حالت اول هم انجام شد . نتیجه این بود که فرم توابع $T(t), X(x)$

به صورت زیر خواهند بود:

$$X(x) = X_n(x) = sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), n = 1,2, \dots (60.2)$$

$$T(t) = T_n(t) = a_n cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad n = 1,2, \dots . (61.2)$$

از شرط اولیه استفاده می کنیم:

$$u(x,0) = 0 \quad => X(x)T(0) = 0 \quad => T(0) = 0 \qquad (62.2)$$

فرمول (62.2) را در فرمول (61.2) قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$T(0) = T_n(0) = a_n = 0, \qquad (63.2)$$

بنابراین

$$T(t) = T_n(t) = b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right), \quad n = 1,2, \dots, \qquad (64.2)$$

بنابراین به ازا هر $n = 1,2, \dots$ هر یک از توابع

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (65.2)$$

در معادله اصلی موج و شرایط مرزی و اولین شرط اولیه صدق می کند. برای به دست آوردن جواب نهایی این تابع باید در دومین شرط اولیه نیز صدق کند. برای بر قراری این شرط، به دلیل همگن بودن، خطی بودن معادله اصلی، از خاصیت برهمنهی استفاده می کنیم و تابع را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[cos\frac{n\pi}{l}(x-ct) - cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[cos\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right] - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right], (66.2)$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) sin\frac{n\pi}{l}(x-ct) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) sin\frac{n\pi}{l}(x+ct), \qquad (67.2)$$

$$u_t(0,t) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (68.2)$$

این رابطه بسط فوریه سینوسی تابع $g(x)$ بر بازه $[-l,l]$ است که تابع به صورت فرد گسترش داده شده است

$$b_n\left(\frac{cn\pi}{l}\right) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \qquad (69.2)$$

$$b_n = \frac{2}{l\left(\frac{cn\pi}{l}\right)} \int_0^l g(x) sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \qquad (70.2)$$

از طرفی دقت کنید که:

$$\int_0^x g(y)dy = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right) \int_0^x sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{l}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\left[1 - cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} cb_n \left[1 - cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right], \qquad (71.2)$$

$$\int_0^{x+ct} g(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} cb_n - \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos \frac{n\pi}{l}(x+ct)$$

$$\int_0^{x+ct} g(y)dy - \int_0^{x-ct} g(y)dy = -\sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos \frac{n\pi}{l}(x+ct) + \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos \frac{n\pi}{l}(x-ct)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} cb_n \left(cos \frac{n\pi}{l}(x-ct) - cos \frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)$$

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos \frac{n\pi}{l}(x-ct) - \sum_{n=1}^{\infty} cb_n cos \frac{n\pi}{l}(x+ct)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[cos \frac{n\pi}{l}(x-ct) - cos \frac{n\pi}{l}(x+ct)\right] = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy, \quad (72.2)$$

**مثال**

تاری از وضعیت تعادل (حالت افقی)با سرعت اولیه مفروض $g(x) = x\left(1 + cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right)$ رها می شود ،معادله (6.1) جواب مسئله است. ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می کنیم:

$$\int_0^l g(\varphi) sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi = \int_0^l \varphi\left(1 + cos\left(\frac{\pi\varphi}{l}\right)\right) sin\left(\frac{n\pi\varphi}{l}\right) d\varphi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{l^2(-1)^n}{n\pi(n^2-1)} & n \neq 1 \\ \dfrac{3l^2}{4\pi} & n = 1 \end{cases}$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi c}\left(\frac{3l^2}{4\pi}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) sin\left(\frac{cn\pi t}{l}\right)$$

$$+\frac{2}{\pi c}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{l^2(-1)^n}{n^2\pi(n^2-1)} sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) sin\left(\frac{cn\pi t}{l}\right)$$

به ازا $l = \pi, \;\; c = 1$ جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \frac{2}{3}\sin(x)\sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2(n^2-1)}\sin(\pi x)\sin(nt)$$

**ارتعاش نخ با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه**

ارتعاش تاری با تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ در نظر بگیرید.

مسئله را به دو قسمت تقسیم می شود. در اولین قسمت مسئله ای با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه صفر در نظر گرفته می شود و در قسمت دوم تغییر مکان اولیه برابر صفر و سرعت اولیه مخالف صفر خواهد بد. فرض کنید جواب اولین مسئله به صورت $u_1(x,t)$ و جواب مسئله دوم به صورت $u_2(x,t)$ باشد. قرار می دهیم:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

در این صورت $u(x,t)$ در معادله ارتعاش و شرایط مرزی صدق می کند. به علاوه

$$u(x,0) = u_1(x,0) + u_2(x,0) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) + \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = 0 + g(x) = g(x)$$

بنابراین $u(x,t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه مخالف صفر است،

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(y)dy$$

که در آن $f^*$ و $g^*$ گسترش های توابع $g,f$ ، بسته به شرایط مرزی این گسترش ها می تواند زوج یا فرد باشد، بر بازه $[-l,l]$ و توابعی متناوب با دوره تناوب $2l$ است

**<u>مثال</u>**

معادله موج را روی بازه $[0,l]$ با شرایط مرزی $u(0,t) = u(l,t) = 0$، و تغییر مکان اولیه

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

و سرعت اولیه به صورت $g(x) = x\left(1 + cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right)$ حل می کنیم. در این صورت $u_1(x,t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه صفر ، و $u_2(x,t)$ جواب مسئله با تغییر مکان اولیه صفر و

سرعت اولیه $g(x)$ است . جواب $u(x,t)$ مجموع جوابهای مثال های (1.1) و (3.1) است، بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi} sin(nx)cos(nt) + \frac{3}{2}\sin(x)\sin(nt) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2(n^2-1)}\sin(\pi x)\sin(nt)$$

---

اکنون به حل معادله انتقال حرارت در حالت استاندارد می پردازیم:

**۳- حل معادله انتقال حرارت**

ساده ترین حالتی که برای یک میله یک بعدی متناهی می توان در نظر گرفت و مسئله را مدلسازی کرد به صورت زیر است:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0 \qquad (1.3)$$

$$u(0,t) = 0, \quad (2.3), \qquad u(l,t) = 0, \quad (3.3) \;\; t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \qquad (4.3)$$

روشی که برای حل به کار می بریم دقیقا همان روشی است که برای حل معادله موج به کار بردیم. قرار می دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$ و با قرار دادن آن در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$XT' = c^2 X''T$$

با تقسیم طرفین رابطه بر $c^2XT$ به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{T'}{c^2T} = \frac{X''}{X}$$

همانطور که در بخش معادله موج دیدیم این تساوی فقط وقتی دارای جواب مخالف صفر خواهد بود که این نسبت مقدار ثابت منفی باشد، یعنی:

$$\frac{T'}{c^2T} = \frac{X''}{X} = K = -p^2, \quad p > 0$$

بنابراین معادلات زیر را برای دو تابع $T(t),\ X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' + p^2X = 0, \quad X(0) = 0, \ \ X(l) = 0, \quad (5.3)$$

$$T' + c^2p^2T = 0, \quad (6.3)$$

بنابراین

$$X(x) = X_p(x) = a_p\cos(px) + b_p\sin(px), \qquad (7.3)$$

$$X(0) = 0 \quad => a_p = 0, \quad (8.3)$$

$$X(l) = b_p\sin(pl) = 0 \quad => \sin(pl) = \sin(n\pi)$$

$$pl = n\pi \quad => p = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,2,\dots (9.3)$$

$$X(x) = X_n(x) = b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1,2,\dots. (10.3)$$

چون $b_n$ می تواند هر عدد مخالف صفر باشد و مقدار آن در محاسبات تاثیری ندارد آنرا برابر با یک قرار می دهیم. از رابطه (6.4.1) هم تابع $T(t)$ محاسبه می شود:

$$T(t) = T_n(t) = c_ne^{-c^2n^2t}, \quad n = 1,2,\dots. \ (11.3)$$

بنابراین به ازا هر $n = 1,2,\dots.$، هر یک از توابع

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_ne^{-c^2n^2t}sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (12.3)$$

در معادله اصلی، شرایط مرزی صدق می کنند. برای برقراری شرط اولیه از خاصیت برهمنهی استفاده می کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-c^2 n^2 t} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (13.3)$$

براب برقراری شرط اولیه باید داشته باشیم:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (14.3)$$

این بسط سینوسی تابع $f(x)$ بر بازه $[-l\,,l]$ است که تابع $f(x)$ بر ان به صورت فرد گسترش داده شده است و

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) s\,in\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \quad n = 1,2,\dots (15.3)$$

---

تا اینجا وضعیت معادله ارتعاش و معادله انتقال حرارت را در حالت استاندارد و با شرایط مرزی یکسان، $u(l,t) = u(0,t) = 0$، را بررسی کردیم. در این حالت دیدیم که فرم تابع $X(x)$ به صورت سینوسی بود. اصطلاحا گویند که جواب معادله( ارتعاش و انتقال حرارت به صورت سینوسی است. به عبارت دیگر اعلام فرم جواب به صورت سینوسی و یا کسینوسی از روی فرم تابع $X(x)$ مشخص می شود).

روش دیگری که می توان برای حل معادلات یک بعدی با طولهای متناهی استفاده کرد، حل معادله به کمک تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی متناهی است.

### 4- حل معادلات به کمک تبدیلات فوریه متناهی

تبدیلات متناهی سینوسی و کسینوسی به صورت زیر تعریف می شوند:

اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[0,\pi]$ تعریف شود در این صورت تبدیل سینوسی متناهی به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_s[f(t)] = F_s[n] = \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \qquad (1.4)$$

و تبدیل کسینوسی با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$F_c[f(t)] = F_c[n] = \int_0^{\pi} f(t)\cos(\mathrm{nt})\,dt, \qquad (2.4)$$

و تبدیلات معکوس  سینوسی و کسینوسی نیز با روابط زیر تعریف می شوند:

$$F_s^{-1}\big[F_s[n]\big] = f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_s[n]\sin(nt), \qquad (3.4)$$

$$F_c^{-1}\big[F_c[n]\big] = f(t) = \frac{F_c[0]}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_c[n]\cos(nt), \qquad (4.4)$$

و فرمول تبدیل مشتق مرتبه دوم تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$F_s[f''(t)] = \int_0^{\pi} f''(t)\sin(nt)\,dt = -n[(-1)^n f(\pi) - f(0)] - n^2 F_s[f(t)], \quad (5.4)$$

$$F_c[f''(t)] = \int_0^{\pi} f''(t)\cos(nt)\,dt = [(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] - n^2 F_c[f(t)], \quad (6.4)$$

و اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[0, l]$ تعریف شود در این صورت با تغییر متغیر  $x = \frac{l}{\pi}t$  و با توجه به رابطه

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t), \quad 0 \le x \le l \;\; => 0 \le t \le \pi$$

بنابراین تابع $g(t)$ تابعی است که متغیر آن در فاصله،  $0 \le t \le \pi$، قرار دارد و تبدیل سینوسی و کسینوسی به صورت فوق تعریف می شود:

$$F_s[g(t)] = G_s[n] = \int_0^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt, \qquad (7.4)$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = \frac{\pi}{l}x$ خواهیم داشت:

$$F_s[g(t)] = F_s[f(x)] = \int_0^l f(x) sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x \times \frac{\pi}{l} dx$$

بنابراین فرمول تبدیل سینوسی تابعی که بر بازه $[0, l]$ تعریف شده باشد به صورت زیر به دست می آید:

$$F_s[f(x)] = \frac{\pi}{l} \int_0^l f(x) sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x dx, \qquad (8.4)$$

در این رابطه متغیر $x$ می تواند با هر متغیر دیگری مانند $t$ هم نشان داده شود.

با همین روش می توان نتیجه گرفت که تبدیل کسینوسی متناهی برای تابع تعریف شده بر بازه متناهی $[0, l]$ به صورت زیر خواهد بود.

$$F_c[f(t)] = F_c[n] = \frac{\pi}{\text{م}} \int_0^l f(t) \cos\left(\frac{\mathrm{n\pi t}}{l}\right) dt, \qquad (9.4)$$

ولی نشان دهید اگر چه بازه تعریف تابع در این حالت تغییر کرده است ولی نشان داده می شود که تبدیلات معکوس سینوسی و کسینوسی نیز با روابط زیر تعریف می شوند:

$$F_s^{-1}\left[F_s[n]\right] = f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_s[n] \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \qquad (10.4)$$

$$F_c^{-1}\left[F_c[n]\right] = f(t) = \frac{F_c[0]}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_c[n] \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \qquad (11.4)$$

و فرمول تبدیل مشتق مرتبه دوم تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$F_s[f''(t)] = \frac{\pi}{l} \int_0^l f''(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

$$= -\frac{n\pi}{l}\left[(-1)^n f(l) - f(0)\right] - \frac{n^2\pi^2}{l^2} F_s[f(t)], \qquad (12.4)$$

$$F_c[f''(t)] = \frac{\pi}{l}\int_0^l f''(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt$$

$$= [(-1)^n f'(l) - f'(0)] - \frac{n^2\pi^2}{l^2}F_c[f(t)], \quad (13.4)$$

اکنون می خواهیم با استفاده از تبدیلات یک مسئله مقدار اولیه – مرزی را حل کنیم:

مسائل زیر را در نظر بگیرید:

۱-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \quad (14.4)$$

$$u(0,t) = 0, \ \ (15.4) \ \ u(\pi,t) = 0, \quad (16.4)$$

$$u(x,0) = f(x), \ \ (17.4) \ \ u_t(x,0) = g(x), \quad (18.4)$$

۲-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \quad (14.4)$$

$$u_x(0,t) = 0, \ \ (19.4), \ \ u_x(\pi,t) = 0, \quad (20.4)$$

$$u(x,0) = f(x), \ \ (17.4), \ \ u_t(x,0) = g(x), \quad (18.4)$$

۳-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \quad (14.4)$$

$$u(0,t) = 0, \ \ (21.4), \ \ u_x(\pi,t) = 0, \quad (22.4)$$

$$u(x,0) = f(x), \ \ (17.4), \ \ u_t(x,0) = g(x), \quad (18.4)$$

در اینجا سه مسئله داده شده است. وقتی بخواهیم از تبدیلات برای حل مسئله استفاده کنیم ابتدا بایستی مشخص کنیم که از چه تبدیلی می توان استفاده کرد. اولا چون متغیر $x$ در فاصله $[0,\pi]$ تغییر می کند بنابراین تبدیلاتی که می توان روی این متغیر به کار برد تبدیلات سینوسی و کسینوسی متناهی است. ضمنا چون معادله شامل مشتق مرتبه دوم نسبت به $x$ است در نتیجه بنا بر روابط تبدیل مشتق مرتبه دوم برای استفاده از تبدیل سینوسی لازم است مقادیر تابع در ابتدا و انتهای تار جزو داده های مسپله باشند. در مسئله اول این اطلاعات جزو داده های مسئله است و بنابراین می توان از تبدیل سینوسی روی متغیر $x$ استفاده کرد.

در مسئله دوم اطلاعات داده شده مقدار مشتقات تابع جواب در نقاط انتهایی است. در نتیجه می توان از تبدیل کسینوسی روی متغیر $x$ استفاده کرد. اما در مسئله ۳ داده های مسئله یکی مقدار تابع جواب در نقطه انتهایی چپ و یکی مقدار مشتق در نقطه راست است. بنابراین نمیتوان از هیچ کدام از تبدیلات برای حل مسئله استفاده کرد و تنها روش جداپذیری را می توان اعمال کرد.

**<u>مثال ۱</u>** مسئله زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \quad (14.4)$$

$$u(0,t) = 0, \ \ (15.5.1) \ \ u(\pi,t) = 0, \quad (16.4)$$

$$u(x,0) = f(x) \ \ (17.4), \qquad u_t(x,0) = g(x), \quad (18.4)$$

این مسئله را با استفاده از تبدیلات حل می کنیم. چون متغیر $x$ در فاصله متناهی تغییر می کند در نتیجه می توان از دو نوع تبدیل فوریه متناهی سینوسی و کسینوسی استفاده کرد. چون در معادله مشتق مرتبه دوم نسبت به $x$ وجود دارد، و مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه، $u(0,t)$, و $u(l.t)$، جزو داده های مسئله باشد می توان از تبدیل سینوسی متناهی روی متغیر $x$ استفاده کرد.

تبدیل سینوسی را روی معادله به کار می بریم:

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = c^2 F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = c^2\{-n[u(\pi,t) - u(0,t)] - n^2 U_s[n,t]\}$$

$$= -n^2 U_s[n,t], \quad (23.4)$$

از طرفی طبق قانون مشتق گیری از انتگرالهای وابسته به پارامتر، خواهیم داشت:

$$F_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U_s(n,t)], \qquad (24.4)$$

با قراردادن در معادله، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U_s(n,t)]+c^2n^2U_s[n,t]=0, \qquad (25.4)$$

این رابطه یک معادله با مشتقات جزیی است ، ولی چون فقط مشتق گیری نسبت به یک متغیر انجام می شود مانند معادله دیفرانسیل معمولی حل می شود:

$$U_s(n,t)=a_n\cos(cnt)+b_n\sin(cnt), \qquad (26.4)$$

در این رابطه بایستی ابتدا ضرایب نامعلوم را محاسبه کرده و سپس تبدیل معکوس گرفته شود. برای تعیین این ضرایب نامعلوم ازتبدیل فوریه سینوسی شرایط اولیه مسئله استفاده می شود.

$$F_s[u(x,0)]=U_s(n,0)=\int_0^{\pi}u(x,0)\sin(nx)dx=\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx=F_s[n], \qquad (27.4)$$

$$\begin{aligned}F_s[u_t(x,0)]&=\frac{\partial}{\partial t}U_s(n,0)\\&=\int_0^{\pi}u_t(x,0)\sin(nx)\,dx=\int_0^{\pi}g(x)\sin(nx)\,dx=G_s[n], \qquad (28.4)\end{aligned}$$

در این روابط $F_s[n]$ و $G_s[n]$ مقادیر معلوم هستند. با استفاده از این مقادیر ضرایب نامعلوم $b_n, a_n$ محاسبه می شوند.

$$U_s(n,0)=a_n,\ \ U_s(n,0)=F_s[n] \quad => a_n=F_s[n], \qquad (29.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U_s(n,0)=\mathrm{cn}b_{n,} \quad \frac{\partial}{\partial t}U_s(n,0)=G_s[n] \quad => b_n=\frac{G_s[n]}{cn}, \qquad (30.4)$$

بنابراین تبدیل جواب $U_s(n,t)$ کاملا مشخص می باشد. کافی است که از این تابع تبدیل معکوس گرفته شود:

$$u(x,t) = F_s^{-1}[U_s(n,t)] = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} U_s(n,t)\sin(nx)$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_s[n]\cos(nt) + \frac{G_s[n]}{cn}\sin(nt)\right]\sin(nx), \quad (31.4)$$

بنابراین جواب مسئله به این صورت به دست می آید.

---

برای حل مثال ۲ نیز مشابه همین روش را دنبال می کنیم. با توجه به شرایط مرزی داده شده،

$u_x(0,t), \quad u_x(\pi,t)$ با استفاده از تبدیل کسینوسی متناهی روی $x$ مسئله را حل خواهیم کرد.

از طرفین رابطه تبدیل کسینوسی می گیریم. خواهیم داشت:

$$F_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = c^2 F_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = [(-1)^n u_x(\pi,t) - u_x(0,t) - n^2 U_c(n,t)]$$

$$= -c^2 n^2 U_c(n,t), \quad (32.4)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2 U_c(n,t)}{\partial t^2}, \qquad (33.4)$$

$$\frac{\partial^2 U_c(n,t)}{\partial t^2} + c^2 n^2 U_c(n,t) = 0, \quad (34.4)$$

در نتیجه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$U_c(n,t) = a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt), \qquad n \geq 0, \qquad (35.4)$$

برای محاسبه ضرایب از تبدیل فوریه کسینوسی شرایط اولیه استفاده می شود:

$$F_c[u(x,0)] = U_c(n,0)$$

$$= \int_0^{\pi} u(x,0)\cos(nx)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = F_c[n], \quad (36.4)$$

$$F_c[u_t(x,0)] = \frac{\partial U_c(n,0)}{\partial t} = \int_0^{\pi} u_t(x,0)\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = G_c[n], \quad n \geq 0, \qquad (37.4)$$

$$U_c(n,0) = a_n, \quad U_c(n,0) = F_c[n], \quad a_n = F_c[n], \qquad (38.4)$$

$$\frac{\partial U_c(n,0)}{\partial t} = cnb_n, \quad \frac{\partial U_c(n,0)}{\partial t} = G_c[n], \quad b_n = \frac{G_c[n]}{cn}, \qquad (39.4)$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$U_c(n,t) = F_c[n]\cos(cnt) + \frac{G_c[n]}{cn}\sin(cnt), \quad n = 0,1,2,\dots, \ t \geq 0, \qquad (40.4)$$

با تعیین تبدیل معکوس کسینوسی جواب مسئله به دست می آید:

$$u(x,t) = F_c^{-1}[U_c(n,t)] = \frac{1}{\pi}U_c(0,t) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} U_c(n,t)\cos(nx), \qquad (41.4)$$

---

اما در مورد مسئله سوم ، با توجه به شرایط مرزی داده شده ،

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0$$

روی متغیر $x$ نه تبدیل فوریه سینوسی و نه تبدیل کسینوسی متناهی می توان به کار برد ، زیرا شرایط نه هر دو روی خود تابع و نه هر دو روی مشتق تابع نسبت به $x$ داده شده است. در این حالت از روش جداپذیری مسئله قابل حل است که قبلا در این مورد توضیح داده شده است.

---

## **5-   مسایل حل شده**

### **مثال 5-1**

مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر را حل کنید:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$u_x(0,t) = 0, \ (2.5) \quad u_x(1,t) = 0, \quad (3.5) \ \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = x(1-x), \quad (4.5) \ \ u_t(x,0) = 0, \ (5.5), \quad 0 \leq x \leq 1$$

**حل**: الف) در این حالت از روش فوریه یا روش جداپذیری استفاده می کنیم. یعنی به دنبال جوابی هسیتیم که متغیر های آن از هم جدا باشند. قرار می دهیم:$u(x,t) = X(x)T(t)$. با قرار دادن این رابطه در معادله اصلی و تقسیم طرفین رابطه بر $XT$ خواهیم داشت:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

که با همان استدلال قبلی این تساوی فقط وقتی برقرار خواهد بود که نسبت مقدار ثابتی باشد. پس داریم:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = k$$

$$X'' - kX = 0, \quad (6.6.1) \quad T'' - kT = 0, \quad (7.5)$$

از طرفی با استفاده از شرایط مرزی می توان شرایطی را روی تابع $X(x)$ به دست آورد. داریم:

$$u_x(0,t) = 0 \quad => X'(0)T(t) = 0 \quad => X'(0) = 0, \quad (8.5)$$

$$u_x(1,t) = 0 \quad => X'(1)T(t) = 0 \quad => X'(1) = 0, \quad (9.5)$$

بنابراین معادله و شرایط روی تابع $X(x)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$X'' - kX = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (10.5)$$

مجددا مانند حالت قبلی برحسب مقادیر مختلف $k$ ، مثبت، صفر و منفی ، بحث خواهیم کرد.

حالت اول اگر $k > 0$. بدون انکه به کلیت امر خللی وارد شود قرار می دهیم $k = p^2, \quad p > 0$

در نتیجه داریم:

$$X'' - p^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \qquad X'(1) = 0, \qquad (11.5)$$

$$X = a_p e^{px} + b_p e^{-px} \qquad (12.5)$$

$$X'(0) = p\left(a_p - b_p\right) = 0 \quad => a_p = b_p, \qquad (13.5)$$

$$X'(1) = p\left(a_p e^{p} - b_p e^{-p}\right) = p a_p\left(e^{p} - e^{-p}\right) = 0, \qquad (14.5)$$

(در این رابطه از تساوی (13.5) استفاده شده است.) چون عبارت داخل پرانتز نمی تواند صفر باشد بنابراین باید $a_p = 0$. در نتیجه $b_p = 0$ ، و بنابراین $X(x) = 0$ و $u(x,t) = 0$، که جواب غیر قابل قبول می باشد.

حالت دوم اگر $\mathrm{k} = 0$ در این حالت دستگاه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$X''(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \qquad X'(1) = 0, \qquad (15.5)$$

جواب معادله به صورت خطی خواهد بود:

$$X(x) = ax + b, \quad X'(x) = a, \qquad (16.5)$$

برای برقراری شرایط مرزی کافی است که $a = 0$. در نتیجه، $X(x) = b \neq 0$. یعنی $b$ می تواند هر عدد حقیقی مخالف صفری باشد.

به ازا این مقدار $k$ دستگاه بر حسب تابع $T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$T''(t) = 0, \quad T'(0) = 0 \qquad (17.5)$$

$$T(t) = ct + d, \quad T'(0) = c, \qquad (18.5)$$

بنابراین کافی است که $c = 0$ و در نتیجه $T(t) = d \neq 0$

یعنی از این حالت $k = 0$ به جواب $u(x,t) = X(x)T(t) = bd \neq 0$ می رسیم.

حالت سوم $k < 0$، قرار می دهیم $p > 0 \quad k = -p^2,$.

معادلات حاصل بر حسب $X(x)$ عبارت است از:

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \qquad X'(1) = 0, \quad (19.5)$$

خواهیم داشت:

$$X(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \quad X'(x) = -pa_p \sin(px) + pb_p \cos(px)$$

$$X'(0) = pb_p = 0 \quad => b_p = 0, \qquad (20.5)$$

$$X'(1) = -pa_p \sin(p) = 0, \qquad (21.5)$$

در اینجا به دنبال مقادیری از $p$ هستیم تا شرط $X'(1) = 0$ را برقرار کند بدون انکه لازم باشد که $a_p$ مساوی صفر باشد.

$$\sin(p) = 0 \;=> \sin(p) = \sin(n\pi) \quad => p = n\pi, n = 1,2,\dots, \quad (22.5).$$

$$p = p_n = n\pi, \qquad n = 1,2,\dots.\,(23.5)$$

به این مقادیر $p_n$ ها مقادیر ویژه مسئله گویند. بنابراین توابع ویژه متناظر با این مقادیر ویژه عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = a_p \cos(n\pi x) = a_n \cos(n\pi x), \qquad n = 1,2,\dots, \qquad (24.5)$$

مسئله متناظر با تابع $T(t)$ عبارت خواهد بود از :

$$T''(t) + (n\pi)^2 T(t) = 0, \qquad T'(0) = 0, \quad (25.5)$$

$$T(t) = T_n(t) = c_n cos(n\pi t) + d_n sin(n\pi t), \qquad (27.5)$$

برای برقراری شرط $T'(0) = 0$ بایستی $d_n = 0$. در نتیجه

$$T_n(t) = c_n cos(n\pi t), \qquad (28.5)$$

پس به ازا هر $n = 1,2,\dots$، داریم

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \cos(n\pi x) c_n cos(n\pi t) \qquad n = 1,2,\dots, \qquad (29.5)$$

دو ضریب ثابت قابل ادغام کردن و نام گذاری جدید است که آن را $\alpha_n = a_n c_n$ می نامیم.

$$u_n(x,t) = \alpha_n cos(n\pi t)cos(n\pi x), \quad n = 1,2,\ldots, \quad (30.5)$$

این توابع در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کنند. ضمنا از قسمت $k = 0$ هم تابع

$u(x,t) = bd = const$ جواب مسئله بود که با اضافه کردن $n = 0$ به مجموعه توابع (30.5) می توان این تابع را به دسته توابع فوق اضافه کرد. بنابراین به ازا $n = 0,1,2,\ldots$ توابع $u_n(x,t)$ در معادله اصلی و شرایط مرزی صدق می کنند. برای برقراری شرایط اولیه $(5.5) - (4.5)$ با استفاده از همگن بودن و خطی بودن معادله (1.5)از خاصیت بر همنهی استفاده می کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n cos(n\pi t)cos(n\pi x), \quad (31.5)$$

ضریب $\alpha_n$ را طوری می یابیم تا داشته باشیم:

$$u(x,0) = x(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n cos(n\pi x), \quad (32.5)$$

در واقع این رابطه بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ بر بازه $[-1\,,1]$ است که تابع بر این بازه به صورت زوج گسترش داده شده باشد.

$$\alpha_n = 2\int_0^1 x(1-x)cos(n\pi x)dx, \quad n = 0,1,2,\ldots. \quad (33.5)$$

البته می توان اولین ضریب یعنی $\alpha_0$ را به طور جداگانه نشان داد،

$$\alpha_0 = 2\int_0^1 x(1-x)dx, \quad \alpha_n = 2\int_0^1 x(1-x)cos\,(n\pi x)dx, \quad n = 1,2,\ldots (34.5)$$

در این صورت،

$$u(x,t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n cos(n\pi t)cos(n\pi x), \qquad (35.5)$$

در این حالت **تابع جواب،$u(x,t)$ ، دارای فرم کسینوسی** است که ضرایب آن از فرمولهای (33.5) محاسبه می شوند.:

ب) در این حالت از روش تبدیلات استفاده می کنیم. چون شرایط مرزی روی مشتقات تابع در دو نقطه انتهایی داده شده است از تبدیل کسینوسی استفاده می کنیم:

$$F_c[u_{tt}] = F_c[u_{xx}] = [(-1)^n u_x(\pi,t) - u_x(0,t)] - n^2 F_c[u(x,t)], \quad (36.5)$$

قرار می دهیم:

$$F_c[u(x,t)] = U_c(n,t), \quad (37.5)$$

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$F_c[u_{xx}] = -n^2 U_c(n,t), \quad (38.5)$$

$$F_c[u_{tt}] = \frac{\pi}{1}\int_0^1 u_{tt}(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{1}x\right)dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U_c(n,t), \quad (39.5)$$

در نتیجه تبدیل معادله اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 U_c(n,t)}{\partial t^2} + n^2 U_c(n,t) = 0, \qquad (40.5)$$

تبدیل جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$U_c(n,t) = A_n cos(n\pi t) + B_n sin(n\pi t), n = 0,1,2,\ldots, \quad (41.5)$$

ابتدا به محاسبه $B_n, A_n$ می پردازیم:

$$F_c[u(x,0)] = U_c(n,0) = \pi\int_0^1 x(1-x)\cos(nx)\,dx = A_n, \quad (42.5)$$

$$F_c[u_t(x,0)] = 0 = \frac{\partial U_c(0,t)}{\partial t} = n\pi B_n \quad => B_n = 0, \quad (43.5)$$

تبدیل معکوس فوریه را محاسبه می کنیم:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}U_c(0,t) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} U_c(n,t)cos(n\pi x), \quad (44.5)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}A_0 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n cos(n\pi t)\big)cos(n\pi x), \quad (45.5)$$

**مثال 5-2**

مطلوبست حل مسئله مقدار مرزی – اولیه زیر:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (46.5)$$

$$u_x(0,t) = 0, \ (47.5) \quad u(1,t) = 0, \quad (48.5) \ \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = x(1-x), \quad (49.5) \ \ u_t(x,0) = x, \ (50.5), \quad 0 \leq x \leq 1$$

**حل**: در این حالت با توجه به شرایط داده شده مشخص است که نمی توان از تبدیلات فوریه متناهی روی متغیر $x$ استفاده کرد و بنابراین با استفاده از روش جداپذیری مسئله را حل خواهیم کرد. با قرار دادن

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

در معادله اصلی و تقسیم طرفین بر $X(x)T(t)$ خواهیم داشت :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = k, \quad (51.5)$$

از طرفی از شرایط اولیه نتایج زیر برای تابع $X(x)$ به دست می آید.

این تساوی فقط و فقط وقتی به جواب مخالف صفر می رسد که $p > 0$ $k = -p^2,$. بنابراین معادلات بر حسب توابع $X(x), T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$X'' + p^2X = 0, \quad (52.5) \quad T'' + c^2p^2T = 0, \qquad (53.5)$$

از شرایط مرزی شرایطی را روی تابع $X(x)$ به دست می آوریم:

$$u_x(0,t) = 0 \quad => \mathrm{X}'(0)\mathrm{T}(\mathrm{t}) = 0 \quad => \mathrm{X}'(0) = 0, \quad (54.5)$$

$$u(1,t) = 0 \quad => X(1)T(t) = 0 \quad => X(1) = 0, \quad (55.5)$$

بنابراین تابع $X(x)$ از معادله (52.5) و شرایط (54.5), (55.5) به دست می آیند.

$$X(x) = X_p(x) = a_p\cos(px) + b_p\sin(px), \qquad (56.5)$$

$$X'(0) = pb_p = 0 => b_p = 0 \qquad (57.5)$$

$$X(1) = -pa_p\sin(p) = 0 \quad => \sin(p) = 0 \quad => p = n\pi$$

$$p = n\pi, \quad n = 1,2, .... \quad (58.5)$$

مقادیر ویژه مسئله به دست می آید. توابع ویژه متناظر با آنها عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = \ a_n\cos(n\pi x), \quad n = 1,2, ... \ (59.5)$$

در این رابطه چون ضریب $a_n$ می تواند هر عدد حقیقی مخالف صفری باشد برای راحتی مقدار آن را برابر با یک در نظر می گیریم. در این حالت گویند معادله دارای جوابی به **فرم کسینوسی** است.

اگر شرایط مرزی به جای (47.51),(48.5) به صورت $u(0,t) = 0$ و $u_x(1,t) = 0$ داده شود در فرم جواب تغییراتی اتفاق خواهد افتاد.

از این شرایط نتیجه می شود که:

$$u(0,t) = 0 \ => X(0)T(t) = 0 \ => X(0) = 0, \quad (60.5)$$

$$u_x(1,t) = 0 \quad => X'(1)T(t) = 0 \ => X'(1) = 0, \quad (61.5)$$

بنابراین تابع $X(x)$ از معادله و شرایط زیر محاسبه می شود:

$$X'' + p^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (62.5)$$

$$X(x) = X_p(x) = a_p \cos(px) + b_p \sin(px), \qquad (63.5)$$

$$X(0) = a_p = 0, \quad (64.5)$$

$$X'(1) = p b_p \cos(p) = 0 \quad => \cos(p) = 0 \quad => p = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$p = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \qquad n = 1,2, \dots. \qquad (65.5)$$

مقادیر ویژه مسئله به دست آمده است. بنابراین توابع ویژه متناظر با آن عبارت است از:

$$X(x) = X_n(x) = b_n sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right), \quad n = 1,2, \dots \quad (66.5)$$

دقت کنید که در این حالت نیز فرم جواب به صورت **سینوسی** است. ادامه حل مسئله مشابه مسائل قبلی است.

کدامیک از تبدیلات فوریه متناهی را می توان روی متغیر $x$ به کار برد و چرا؟ دلیل بیاورید.

***<u>مثال 3-5</u>***

مطلوبست حل معادله زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, t > 0, \qquad (67.5)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \quad (68.5)$$

$$u(0,t) = 0, \quad (69.5) \qquad u_x(l,t) = -u(l,t), \quad (70.5) \quad t \ge 0$$

در این مسئله هم با توجه به شرایط مرزی داده شده از هیچکدام از تبدیلات فوریه متناهی روی متغیر $x$ نمی توانیم استفاده کنیم، چرا؟، و در نتیجه ، با استفاده از روش جداپذیری و قرار دادن $u(x,t) = X(x)T(t)$، خواهیم داشت:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \qquad (71.5)$$

از شرایط مرزی داریم:

$$X(0) = 0, \quad (72.5), \quad X'(l) + X(l) = 0, \quad (73.5)$$

بر حسب مقادیر مختلف $k$ (از نظر مثبت، صفر و منفی بودن) برای به دست آوردن جواب مخالف صفر بحث خواهیم کرد.

نظیر حالت های قبل از حالت مثبت جواب مخالف صفر به دست نمی آید. در حالت $k = 0$ مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$X''(x) = 0, \qquad (74.5)$$

$$X(0) = 0, \quad (72.5), \quad X'(l) + X(l) = 0, \quad (73.5)$$

در این صورت جواب به صورت زیر است:

$$X(x) = ax + b, \qquad (75.5)$$

از رابطه (72.5) $b = 0$. از رابطه (63.5) نتیجه می شود که:

$$a + al = 0 \quad => a = 0 => X(x) = 0, \quad (74.5)$$

از حالت $k < 0$ و قرار دادن $k = -p^2, \quad p > 0$ معادله و شرایط زیر را خواهیم داشت:

$$X'' + p^2X = 0, \qquad (75.5)$$

$$X(0) = 0, \quad (72.5), \quad X'(l) + X(l) = 0, \quad (73.5)$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = X_p(x) = A_p \cos(px) + B_p \sin(px), \qquad (76.5)$$

$$(72.6.1) => A_p = 0, \ \ (73.5) => B_p(\sin(pl) + pcos(pl)) = 0, \qquad (77.5)$$

به دنبال مقادیری از $p$ هستیم تا رابطه :

$$\sin(pl) + pcos(pl) = 0, \qquad (78.5)$$

این معادله به صورت تحلیلی حل نمی شود. ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم :

$$\tan(pl) = -p, \qquad (79.5)$$

اکنون ابتدا دو منحنی $y = \tan(pl)$ و $y = -p$ را در یک دستگاه محورهای مختصات $y, p$ رسم کنید. با توجه به مثبت بودن $p$ از روی منحنی ها دیده می شود که بینهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند. طول نقاط تقسیم را با $z_{n,} \quad n = 1,2, \ldots$ که $z_1 < z_2 < z_3 < \cdots < z_n < \cdots$.

در نتیجه: $\quad p = z_n, \qquad n = 1,2, \ldots.$ مقادیر ویژه مسئله و توابع ویژه متناظر با آن عبارتند از:

$$X(x) = X_n(x) = \sin(z_n x), \qquad n = 1,2, \ldots, \quad (80.5)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{T'}{T} = k = -p^2 = -z_n^2$$

$$T_n(t) = A_n e^{-z_n^2 t}, \qquad (81.5)$$

بنابراین به ازا هر $n = 1,2, \ldots$ تابع

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = A_n e^{-z_n^2 t} sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \qquad (82.5)$$

از خاصیت برهمنهی استفاده می کنیم و ثابت باقیمانده، $A_n$، را طوری محاسبه می کنیم تا جواب در شرط اولیه هم صدق کند:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-z_n^2 t} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (83.5)$$

برای برقراری شرط اولیه باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (84.5)$$

بنابراین بایستی که:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\, in\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad (85.5)$$

نمودار توابع $y = \tan(pl)$ $y = -p,$ در صفحه $yp$.