$$k_i = hA_i + h^2 B_i + h^3 C_i + h^4 D_i + \cdots$$

$$k_i = hf + h^2 c_i Df + h^3\left[(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2) f_y Df + \frac{1}{2} c_i^2 D^2 f\right] + h^4\left[a_{i1}(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + a_{i2}(a_{21}c_1 + a_{22}c_2)\right] f_y^2 Df + \cdots] + \cdots$$

$i = 1, 2$

اکنون از k_i در رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 = y_n + w_1\Big[hf + h^2 c_1 Df + h^3[(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) f_y Df + \frac{1}{2} c_1^2 D^2 f] + h^4[a_{11}(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + a_{12}(a_{21}c_1 + a_{22}c_2)] f_y^2 Df + \cdots] + \cdots\Big] +$$
$$w_2\Big[hf + h^2 c_2 Df + h^3[(a_{21}c_1 + a_{22}c_2) f_y Df + \frac{1}{2} c_2^2 D^2 f] + h^4[a_{21}(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + a_{22}(a_{21}c_1 + a_{22}c_2)] f_y^2 Df + \cdots] + \cdots\Big]$$

با مرتب کردن عبارت فوق برحسب h داریم:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2) hf + h^2 (w_1 c_1 + w_2 c_2) Df + h^3\Big[[w_1(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + w_2(a_{21}c_1 + a_{22}c_2)] f_y Df + \frac{1}{2}(w_1 c_1^2 + w_2 c_2^2) D^2 f\Big] +$$
$$h^4\Big[[(a_{11} + a_{21})(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + (a_{12} + a_{22})(a_{21}c_1 + a_{22}c_2)] f_y^2 Df + \cdots\Big] + \cdots$$

(II)

به کمک رابطه (I) داریم:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2!} Df + \frac{h^3}{3!}(f_y Df + D^2 f) + \frac{h^4}{4!}(D^3 f + f_y D^2 f + \cdots) + \cdots$$

(III)

اکنون با مقایسه (II) و (III) داریم:

الف) اگر شرط‌ها تا ضریب h^2 مقایسه کنیم (روش مرتبه دوم)

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$w_1 c_1 + w_2 c_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_{11} + a_{12} = c_1$$
$$a_{21} + a_{22} = c_2$$

$T_n = O(h^3)$

همچنین داشتیم: $\left(\frac{T_n}{h}\right) = O(h^2) \Rightarrow P = 2$

۴ معادله با ۸ مجهول: با دادن ۴ مقدار اختیاری بقیه محاسبه می‌گردد.

ب) با مقایسه تا مرتبه h^3 داریم:

$$w_1+w_2=1$$
$$w_1c_1+w_2c_2=\frac{1}{2}$$
$$w_1(a_{11}c_1+a_{12}c_2)+w_2(a_{21}c_1+a_{22}c_2)=\frac{1}{6}$$
$$w_1c_1^2+w_2c_2^2=\frac{1}{3}$$
$$c_1=a_{11}+a_{12}$$
$$c_2=a_{21}+a_{22}$$

۶ معادله با ۸ مجهول داریم که با انتخاب دو مقدار اختیاری برای آنها، بقیهٔ پارامترهای مجهول معین می‌گردد.

اگر بخواهیم k_1 یا k_2 صریح شوند، می‌توان نوشت:

صریح k_1: $a_{11}=a_{12}=0 \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=\frac{2}{3} \\ w_2=\frac{3}{4} \\ w_1=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\quad a_{21}=a_{22}=\frac{1}{3}$

در اینصورت:

$$k_1=hf(t_n,y_n)$$
$$k_2=hf(t_n+\tfrac{2}{3}h,\ y_n+\tfrac{1}{3}k_1+\tfrac{1}{3}k_2)$$
$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{4}(k_1+3k_2)$$

در این روش: $T_n=O(h^4)\Rightarrow \left(\frac{T_n}{h}\right)=O(h^3)$

روش از مرتبهٔ سوم $\quad p=3$

در حالت الف: اگر پارامترهای اختیاری را بصورت $a_{21}=a_{22}=a_{12}=0$، $w_2=0$

داریم: $c_2=0 \quad w_1=1 \quad c_1=\frac{1}{2} \quad a_{11}=\frac{1}{2}$

در اینصورت:

$$\begin{cases} k_1=hf(t_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}k_1) \\ y_{n+1}=y_n+k_1 \end{cases}$$

ج) با تطابق تعداد بیشتری از جملات داریم:

$$w_1+w_2=1$$
$$w_1c_1+w_2c_2=\frac{1}{2}$$
$$w_1c_1^2+w_2c_2^2=\frac{1}{3}$$
$$w_1c_1^3+w_2c_2^3=\frac{1}{4}$$
$$w_1(a_{11}c_1+a_{12}c_2)+w_2(a_{21}c_1+a_{22}c_2)=\frac{1}{6}$$
$$(w_1a_{11}+w_2a_{21})(a_{11}c_1+a_{12}c_2)+(w_1a_{12}+w_2a_{22})(a_{21}c_1+a_{22}c_2)=\frac{1}{24}$$
$$w_1c_1(a_{11}c_1+a_{12}c_2)+w_2c_2(a_{21}c_1+a_{22}c_2)=\frac{1}{8}$$
$$w_1(a_{11}c_1^2+a_{12}c_2^2)+w_2(a_{21}c_1^2+a_{22}c_2^2)=\frac{1}{12}$$
$$c_1=a_{11}+a_{12}$$
$$c_2=a_{21}+a_{22}$$

با حل دستگاه فوق ۸ پارامتر مجهول تعیین می‌گردد. می‌توان ۴ معادله اول را باهم در نظر گرفته و با حل آن c_1، c_2 و w_1 و w_2 را تعیین نموده سپس ۴ معادله بعدی را در نظر گرفته و حل نمائیم.

$$w_1+w_2=1$$
$$w_1c_1+w_2c_2=\frac{1}{2} \Rightarrow w_2(c_1-c_2)=c_1-\frac{1}{2} \Rightarrow c_2\left(c_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{3}$$
$$w_1c_1^2+w_2c_2^2=\frac{1}{3} \Rightarrow w_2c_2(c_1-c_2)=\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{3} \Rightarrow c_2\left(\frac{1}{3}c_1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}c_1-\frac{1}{4}$$
$$w_1c_1^3+w_2c_2^3=\frac{1}{4} \Rightarrow w_2c_2^2(c_1-c_2)=\frac{1}{3}c_1-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}c_1-c_1c_2+\frac{1}{2}c_2=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}c_1-\frac{1}{2}c_1c_2+\frac{1}{3}c_2=\frac{1}{4}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{12}c_1+\frac{1}{12}c_2=\frac{1}{12} \Rightarrow c_1+c_2=1$$

$$\frac{1}{2}c_1+(1-c_1)\left(\frac{1}{2}-c_1\right)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}c_1+c_1^2-\frac{3}{2}c_1+\frac{1}{6}=0 \qquad c_1, c_2=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$$

$$w_۲ (c_۱ - c_۲) = c_۱ - \frac{۱}{۲}$$

$$w_۲ \left(\frac{۳+\sqrt{۳}}{۶} - \frac{۳-\sqrt{۳}}{۶} \right) = \frac{۳+\sqrt{۳}}{۶} - \frac{۱}{۲}$$

$$w_۲ = \left(\frac{۳+\sqrt{۳}}{۶} - \frac{۱}{۲} \right) \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow w_۱ = \frac{۱}{۲}$$

به همین ترتیب :

$$a_{۱۱} = a_{۲۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$a_{۱۲} = \frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۱۲} \qquad a_{۲۱} = \frac{۳-۲\sqrt{۳}}{۱۲}$$

در اینصورت :

$$k_۱ = h f\left(t_n + \frac{۳+\sqrt{۳}}{۶} h, y_n + \frac{۱}{۴} k_۱ + \frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۱۲} k_۲ \right)$$

$$k_۲ = h f\left(t_n + \frac{۳-\sqrt{۳}}{۶} h, y_n + \frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۱۲} k_۱ + \frac{۱}{۴} k_۲ \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{۱}{۲} (k_۱ + k_۲)$$

در این روش : $T_n = O(h^۵) \Rightarrow \left(\frac{T_n}{h}\right) = O(h^۴) \Rightarrow p = ۴$

برای تعیین ناحیه پایداری هر روش ، آن را روی معادله $y' = \lambda y$ پیاده سازی می نمائیم :

در حالت الف :

$$f = \lambda y \Rightarrow k_۱ = \lambda h \left(y_n + \frac{۱}{۲} k_۱ \right)$$

$\lambda h = \bar{h}$ قرار میدهیم $\qquad k_۱ = \dfrac{\bar{h} y_n}{۱ - \frac{۱}{۲} \bar{h}}$

$$y_{n+1} = y_n + k_۱ \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{\bar{h}}{۱ - \frac{۱}{۲}\bar{h}} y_n$$

$$y_{n+1} = \left(۱ + \frac{۲\bar{h}}{۲ - \bar{h}} \right) y_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{۲+\bar{h}}{۲-\bar{h}} \right) y_n = \left(\frac{۲+\bar{h}}{۲-\bar{h}} \right)^۲ y_{n-1} = \cdots =$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{۲+\bar{h}}{۲-\bar{h}} \right)^{n+1} y_۰$$

در $n \to \infty$، برای آنکه y_{n+1} کراندار باشد، لازم است:

$$\left|\frac{2+\bar h}{2-\bar h}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{2+\bar h}{2-\bar h} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2+\bar h}{2-\bar h} \le 1 \\ \text{و} \\ \dfrac{2+\bar h}{2-\bar h} \ge -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\bar h}{2-\bar h} \le 0 & \bar h \notin (0,2] \\ \text{و} & \text{و} \\ \dfrac{4}{2-\bar h} \ge 0 & \bar h < 2 \end{cases} \Rightarrow \bar h \le 0 \Rightarrow \boxed{\bar h \le 0}$$

ناحیه‌ای که در آن جواب y_{n+1}، در $n \to \infty$ کراندار بماند (ناحیه پایداری).

نظیر مسأله روی قسمت (ب) (ج) اجرا می‌گردد.

ناحیه پایداری قسمت (ج) را تعیین کنید. ($y' = \lambda y$ و $\bar h = ?$).

نشان دهید:

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\bar h + \frac{1}{2}\bar h^2}{1 - \frac{1}{2}\bar h + \frac{1}{12}\bar h^2} \Rightarrow \bar h \in (-\infty, 0)$$

توجه: مرتبه روش رانگ-کوتای ضمنی به مراتب بالاتر از روش رانگ-کوتای صریح است و ناحیه پایداری آن نیز بزرگ است. مزیت دیگر آن تعداد مراحل کمتر، در مقایسه با روش صریح است. یکی از معایب آن حل یک دستگاه غیرخطی در هر مرحله است.