بحث در پایداری روش: معادله دیفرانسیل $y'(t)=f(t,y(t))$ را در نظر بگیرید:

برای بحث در پایداری یا کنترل خطای گرد کردن هر روش، برای کاستن از پیچیدگی هر روش، ابتدا معادله مفروض را به شکل ساده زیر تبدیل می‌کنند:

$$f(t,y(t))=f(t_n,y(t_n))+(t-t_n)f_t(t_n,y(t_n))+$$
$$(y(t)-y(t_n))f_y(t_n,y(t_n))+\cdots$$

تعریف می‌کنیم:

$$\lambda=f_y(t_n,y(t_n))$$
$$B=f_t(t_n,y(t_n))$$
$$C=-y_n f_y(t_n,y(t_n))-t_n f_t(t_n,y(t_n))+f_n$$

در اینصورت:

$$f(t,y(t))\simeq \lambda y(t)+Bt+C$$

به دلیل آنکه می‌خواهیم تأثیرات هر روش را روی $y(t)$ بررسی کنیم، عبارت فوق را بصورت ساده‌تر زیر در نظر می‌گیریم:

$$y'(t)=f(t,y(t))\simeq \lambda y(t)$$

یا

$$y'(t)=\lambda y(t)$$

برای بررسی پایداری هر روش، آنرا روی معادله $y'=\lambda y$ پیاده‌سازی می‌کنند.

توجه:

$$\begin{cases} y'=\lambda y \\ y(t_0)=y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t)=y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

الف) اگر $\lambda<0$، با افزایش t، $y(t)$ کراندار است.

ب) اگر $\lambda>0$، با افزایش t، $y(t)$ افزایش می‌یابد.

ج) اگر $\lambda=0$، با افزایش t، $y(t)$ ثابت است.

در تعریف پایداری هر روش ، که در آن کرانداری جوابها مورد بحث قرار می گیرد ، حالت $\lambda < 0$ را در نظر می گیرند و برای $\bar{h} = h\lambda$ بازه ای تعیین می شود که در آن y_{n+1} کراندار است . این بازه را بازهٔ پایداری یا پایداری مطلق می نامند .

حل عددی معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر، بدون تبدیل به دستگاه :

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم عمومی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & t \in [t_0, b] \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم :

$$K_1 = \frac{h^2}{2!} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$K_2 = \frac{h^2}{2!} f\left(t_n + c_2 h, y_n + c_2 h y'_n + a_{21} K_1, y'_n + \frac{1}{h} b_{21} K_1\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + w_1 K_1 + w_2 K_2$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{h}(w'_1 K_1 + w'_2 K_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} b_{21}$$

بطوریکه c_2 و a_{21} و b_{21} و w_iها و w'_iها پارامترهای مجهول هستند که باید تعیین گردند.

به کمک سری تیلور تابع $y(t)$ و $y'(t)$ (در صورت وجود) داریم :

$$(I) \quad y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \cdots$$

$$y'_{n+1} = y'_n + h y''_n + \frac{h^2}{2!} y'''_n + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}_n + \cdots$$

بطوریکه :

$$y''_n = f_n = f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$y'''_n = f_t + f_y y' + f f_{y'} = Df_n, \quad Df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + f \frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$y^{(4)}_n = D^2 f_n + f_{y'} Df_n + f_n f_y$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + y' \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial y'}$$

با جایگزینی این مقادیر در (۱) داریم:

$$y_{n+1}=y_n+hy'_n+\frac{h^2}{2!}f_n+\frac{h^3}{3!}Df_n+\frac{h^4}{4!}(D^2f_n+f_{y'}Df_n+f_nf_y)+\cdots$$

$$y'_{n+1}=y'_n+hf_n+\frac{h^2}{2!}Df_n+\frac{h^3}{3!}(D^2f_n+f_{y'}Df_n+f_nf_y)+\cdots$$

اکنون k_2 را بصورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\frac{2}{h^2}k_2=f_n+h(c_2f_t+c_2y'_nf_y+\tfrac{1}{2}b_{21}f_nf_{y'})+\frac{h^2}{2!}(c_2^2f_{tt}+$$
$$c_2^2y_n'^2f_{yy}+\tfrac{1}{4}b_{21}^2f_n^2f_{y'y'}+2c_2^2y'_nf_{ty}+c_2b_{21}f_nf_{ty'}+$$
$$c_2b_{21}f_ny'_nf_{yy'}+a_{21}f_nf_y)+O(h^3)$$

پس از ساده‌سازی عبارت فوق داریم:

$$k_2=\frac{h^2}{2}f_n+\frac{h^3}{2}c_2Df_n+\frac{h^4}{4}(c_2^2D^2f_n+a_{21}f_nf_y)+O(h^5)$$

بطوریکه در آن $c_2=\frac{1}{2}b_{21}$ بکار رفته است.

k_1 و k_2 را در y_{n+1} و y'_{n+1} بصورت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} y_{n+1}&=y_n+hy'_n+\frac{h^2}{2}(w_1+w_2)f_n+\\ y'_{n+1}&=y'_n+\frac{1}{2}h(w'_1+w'_2)f_n+\end{aligned}$$

با مقایسه (II) با (III) داریم:

$$w_1+w_2=1$$
$$w'_1+w'_2=2$$
$$c_2w_2=\frac{1}{3}$$
$$c_2w'_2=1$$

به دلیل آنکه ضریب h^4 در y_{n+1} برای هر انتخاب wها و w'ها از روابط فوق قابل انطباق با ضرایب بسط متناظر در (II) نیست. پس خطای برشی از $O(h^4)$ است.

یک جواب از معادلات فوق بصورت زیراست :

$$\begin{cases} w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 = a_{21} = \frac{2}{3} \\ b_{21} = \frac{4}{3} \\ w'_1 = \frac{1}{2} \\ w'_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین :

$$k_1 = \frac{h^2}{2!} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \frac{h^2}{2!} f\left(t_n + \frac{2}{3}h,\ y_n + \frac{2}{3}hy'_n + \frac{2}{3}k_1,\ y'_n + \frac{4}{3h}k_1\right)$$

$$(I_7) \quad y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{2h}(k_1 + 3k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

بطور مشابه می توان روشهای رانگ - کوتا از مرتبه بالاتر را برای معادله مرتبه دوم طراحی نمود :

$$k_1 = \frac{h^2}{2} f\left(t_n + \frac{1}{6}h,\ y_n + \frac{1}{6}hy'_n\right)$$

$$k_2 = \frac{h^2}{2} f\left(t_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}hy'_n + \frac{1}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = \frac{h^2}{2} f\left(t_n + \frac{5}{6}h,\ y_n + \frac{5}{6}hy'_n + \frac{4}{9}k_1 + \frac{2}{9}k_2\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{6}(10k_1 + 4k_2 + 2k_3)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{16h}(12k_1 + 8k_2 + 12k_3)$$

سیستم فوق برای حل $y''(t) = f(t, y(t))$ طراحی شده است .

مثال) معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} y''(t) = (1+t^2)\,y(t), & t \in [0,1],\ h = 0/1 \\ y(0) = 1 & \\ y'(0) = 0 & y(t) = \frac{1}{2}e^{t^2} \end{cases}$$

حل عددی:

$t_0 = 0,\ t_1 = 0.1,\ \dots,\ t_{10} = 1$

$n = 0$

$$k_1 = \frac{h^2}{2} f\left(t_0 + \frac{1}{60},\ y_0 + \frac{1}{60} y'_0\right) = \frac{1}{200} f\left(\frac{1}{60},\ 1\right) = \frac{1}{200}\left(1 + \frac{1}{3600}\right)(1) = 0.005001$$

$$k_2 = \frac{h^2}{2} f\left(t_0 + \frac{1}{20},\ y_0 + \frac{1}{20} y'_0 + \frac{1}{3}\, 0.005001\right) = \frac{1}{200} f\left(\frac{1}{20},\ 1.001667\right) = 0.005020$$

$$k_3 = \frac{h^2}{2} f\left(t_0 + \frac{5}{60},\ y_0 + \frac{5}{60} y'_0 + \frac{4}{9} \times 0.00500 + \frac{2}{9}\, 0.00502\right) =$$

$$k_3 = \frac{1}{200} f\left(\frac{5}{60},\ 1 + 0.002222 + 0.001115\right) = \frac{1}{200} f\left(\qquad,\ 1.003337\right)$$

$$k_3 = 0.005051$$

$$y_1 = y_0 + 0.1\, y'_0 + \frac{1}{6}\left(10 k_1 + 4 k_2 + 2 k_3\right) = 1.013365$$

$$y'_1 = y'_0 + \frac{1}{26}\left(12 k_1 + 8 k_2 + 12 k_3\right) = 0.10049$$

$$y(0.1) = \frac{1}{2} e^{0.1}$$

$$y'(0.1) = 0.1\, e^{0.1}$$

با ادامه‌ی این روند برای $n = 1, 2, \dots, 9$ داریم:

$$y_{10} = 1.648568$$

$$y(t_{10}) = y(1) = 1.6487213$$

پایداری روش رانگ-کوتای فوق:

برای بحث در پایداری روش، معادله‌ی دیفرانسیل ساده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y''(t) = \alpha y(t), & \alpha \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

معادلات یا روابط بکار رفته در (IV) را در نظر بگیرید، در این صورت:

$$k_1 = \frac{h^2}{2} \alpha y_n$$

$$k_2 = \left(\frac{h^2}{2}\alpha + \frac{h^4 \alpha^2}{9}\right) y_n + \frac{h^3}{3} \alpha y'_n$$

با جایگزینی این مقادیر، برای y_{n+1} و y'_{n+1} داریم:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{4}\alpha y_n + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{2}\alpha + \frac{h^4\alpha^2}{9}\right) y_n + \frac{h^3}{6}\alpha y'_n = \left[1 + \frac{h^2\alpha}{2} + \frac{h^4\alpha^2}{18},\ h + \frac{h^3\alpha}{6}\right]\left[y_n, y'_n\right]^t$$

همچنین

$$y'_{n+1} = [\alpha h + \frac{1}{6}h^3\alpha^2 , 1 + \frac{h^2\alpha}{2}][y_n , y'_n]^t$$

در اینصورت

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y_n \\ y'_n \end{bmatrix}$$

بطوریکه:

$$a_{11} = 1 + \frac{h^2\alpha}{2} + \frac{h^4\alpha^2}{18}$$

$$a_{12} = h + \frac{h^3\alpha}{6}$$

$$a_{21} = \alpha h + \frac{1}{6}h^3\alpha^2$$

$$a_{22} = 1 + \frac{h^2\alpha}{2}$$

حالات زیر را در نظر میگیریم:

۱) اگر $\alpha = 0$، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_{n-1} + 2hy'_{n-1} = \cdots = y_0 + nhy'_0$$

$$y'_{n+1} = y'_n = \cdots = y'_0$$

زیرا:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = (y_{n-1} + hy'_{n-1}) + hy'_{n-1} = y_{n-1} + 2hy'_{n-1} = \cdots = y_0 + nhy'_0$$

بطوریکه nh طول بازه بوده و ثابت است. خطاهای ناچیز در y_0 و y'_0، خطاهای بزرگ در y_{n+1} و y'_{n+1} پدید نمی‌آورند و روش پایدار است.

۲) اگر $\alpha = -k^2$ مقادیر ویژهٔ ماتریس A عبارتند از:

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{1}{2}[a_{11} + a_{22} \pm [(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}]^{\frac{1}{2}}$$

که برحسب $\bar{h} = hk$ بدست می‌آید. با استفاده از شرط $|\lambda_i| \leq 1$ داریم: $0 \leq h^2k^2 \leq 4.44$،

که در اینصورت y_{n+1} و y'_{n+1} بی‌کران رشد نمی‌کنند و روش پایدار است.

۳) برای $\alpha = k^2$ بطور مشابه بررسی می‌گردد.