دستگاه معادلات دیفرانسیل: قبلاً ملاحظه نمودیم که هر معادله دیفرانسیل مرتبه m را می توان تبدیل به یک دستگاه معادله دیفرانسیل نمود. در اینصورت دستگاه شکل برداری به صورت زیر خواهد داشت.

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad f(t, y(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\ f_2(t, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(t, y_1, \dots, y_m) \end{bmatrix}$$ بطوریکه در آن

$$y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix}$$

روشهای حل معادله مرتبه اول که شامل روش سری تیلور و روش های مختلف رانگ-کوتا بودند، با تغییرات اندک قابل پیاده سازی برای دستگاه فوق هستند. اگر روش تک گامی را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$$

خواهیم داشت

$$\phi(t_n, y_n, h) = \begin{bmatrix} \phi_1(t_n, y_{1n}, \dots, y_{mn}, h) \\ \phi_2(t_n, y_{2n}, \dots, y_{mn}, h) \\ \vdots \\ \phi_m(t_n, y_{1n}, \dots, y_{mn}, h) \end{bmatrix}$$

$$y_n = [y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{mn}]^t$$

روش سری تیلور را ارائه می‌دهیم:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \cdots + \frac{h^p}{p!} y_n^{(p)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

$$y_n^{(k)} = \begin{bmatrix} y_{1n}^{(k)} \\ y_{2n}^{(k)} \\ \vdots \\ y_{mn}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(k-1)}(t_n, y_{1n}, \ldots, y_{mn}) \\ f_2^{(k-1)}(t_n, y_{1n}, \ldots, y_{mn}) \\ \vdots \\ f_m^{(k-1)}(t_n, y_{1n}, \ldots, y_{mn}) \end{bmatrix}$$

بطوریکه

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را به کمک روش سری تیلور با $h = \frac{1}{4}$ حل کنید:

$$\begin{cases} y'' + y' = 2x + 2 & , x \in [0, 2] \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

جواب دقیق $y(x) = x^2 + 1$

$$h = \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{4}, \ldots, x_8 = 2$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) \\ y'(t) &= y_2(t) \end{aligned} \Rightarrow Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -y_2(t) + 2x + 2 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} f_1(t, y_1, y_2) = y_2(t) \\ f_2(t, y_1, y_2) = -y_2(t) + 2t + 2 \end{cases} \qquad p = 2$$

$$Y_{n+1} = Y_n + h Y'_n + \frac{h^2}{2!} Y''_n$$

$$n = 0 \Rightarrow Y_1 = Y_0 + h Y'_0 + \frac{h^2}{2!} Y''_0 \qquad (\mathrm{II})$$

به کمک (I):

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y'_0 = \begin{bmatrix} y'_1(0) \\ y'_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(0) \\ -y_2(0) + 2(0) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Y''_0 = \begin{bmatrix} y'_2(0) \\ -y'_2(0) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2(0) + 2(0) + 2 \\ -y_2(0) \underbrace{+ 2(0) + 2}_{2} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

به کمک رابطه‌ی (II) داریم:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} \frac{17}{16} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} \qquad y_1 = \begin{bmatrix} y_1(t_1) \\ y_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{16} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{مقدار} \ y(\frac{1}{4}) = 1/0625 \\ \text{تقریبی} \ y'(\frac{1}{4}) = /625 \end{array}$$

مقدار خطا:

مقدار واقعی
$$\begin{cases} y(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 + 1 = \frac{17}{16} = 1/0625 \\ y'(\frac{1}{4}) = 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} = /5 \end{cases}$$

خطا
$$\begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = /625 - /5 = /125 \end{cases}$$

برای $n=1$ و ... و $n=7$، مراحل فوق تکرار می‌گردد.

روش رانگ-کوتا: به عنوان نمونه روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم را به صورت زیر، برای حل دستگاه فوق تعمیم می‌دهیم:

$$k_1 = h f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = h f(t_n + h, y_n + k_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

به صورت متناظر داریم:

$$k_1 = h\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{bmatrix} \quad k_3 = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ \vdots \\ k_{m3} \end{bmatrix}$$

$$k_4 = \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ \vdots \\ k_{m4} \end{bmatrix}$$

$$k_{j1} = h f_j(t_n, y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{mn}), \quad 1 \le j \le m$$

$$k_{j2} = h f_j\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{1n} + \frac{1}{2}k_{11}, \dots, y_{mn} + \frac{1}{2}k_{m1}\right)$$

$$k_{j3} = h f_j\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{1n} + \frac{1}{2}k_{12}, \dots, y_{mn} + \frac{1}{2}k_{m2}\right)$$

$$k_{j4} = h f_j\left(t_n + h, y_{1n} + \frac{1}{2}k_{13}, \dots, y_{mn} + \frac{1}{2}k_{m3}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

بطور کلی

$$\begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \\ \vdots \\ y_{m,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ \vdots \\ y_{m,n} \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\left\{ \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ \vdots \\ k_{m3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ \vdots \\ k_{m4} \end{bmatrix} \right\}$$

مثال)

$$\begin{cases} x' = y, & t \in [0,1] \\ y' = -x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \cos t \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{4}$$

روش رانگ - کوتای مرتبه دوم را برای حل دستگاه فوق در نظر می‌گیریم:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 1$$

$$t_0 = 0, \; t_1 = \frac{1}{4}, \; t_2 = \frac{1}{2}, \; t_3 = \frac{3}{4}, \; t_4 = 1$$

$$\begin{cases} k_1 = h f(t_n, y_n) \\ k_2 = h f(t_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{11} = h f_1(t_n, x_n, y_n) \\ k_{21} = h f_2(t_n, x_n, y_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{12} = h f_1(t_n + h, x_n + k_{11}, y_n + k_{21}) \\ k_{22} = h f_2(t_n + h, x_n + k_{11}, y_n + k_{21}) \end{cases}$$

$n = 0$

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{1}{4} f_1(t_0, x_0, y_0) = \frac{1}{4} y_0 = \frac{1}{4} \\ k_{21} = \frac{1}{4} f_2(t_0, x_0, y_0) = \frac{1}{4}(-x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{12} = \frac{1}{4} f_1\left(t_0 + \frac{1}{4}, x_0 + \frac{1}{4}, y_0 + 0\right) = \frac{1}{4}(y_0 + 0) = \frac{1}{4} \\ k_{22} = \frac{1}{4} f_2\left(t_0 + \frac{1}{4}, x_0 + \frac{1}{4}, y_0 + 0\right) = \frac{1}{4}\left(-x_0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left\{ \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{11}{12} \end{bmatrix}$$

جواب دقیق

$$x(t_1) = \sin t_1 = \sin \frac{1}{4} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{4} - \sin\frac{1}{4}$$

$$y(t_1) = \cos t_1 = \cos \frac{1}{4} \Rightarrow e_2 = \frac{11}{12} - \cos\frac{1}{4}$$

برای $n=1$ و ... و $n=3$ این روند را ادامه می‌دهیم و مقدار $\begin{cases} y_{14} \\ y_{24} \end{cases}$ را تعیین می‌نماییم.

آنالیز پایداری روش: برای بحث در پایداری روش عددی بکار رفته برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل، حالت خاص از دستگاه

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تابع f دارای مشتقات جزئی پیوسته $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}=a_{ij}$ باشد و $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ یک ماتریس $m\times m$ باشد، بحث را در حالتیکه A به t و y وابسته نباشد قطع می‌کنیم. بنابراین حالت ساده‌ای از دستگاه فوق را به صورت $y'(t)=Ay(t)$ در نظر می‌گیریم، بطوریکه A یک ثابت با مقادیر ویژهٔ حقیقی یا مختلط متمایز با قسمت حقیقی منفی است. در اینصورت:

$$\begin{cases} y'(t)=A\,y(t) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t)=e^{At}y_0 \quad , t_0=0$$

بطوریکه

$$e^{At}=I+At+\frac{(At)^2}{2!}+\cdots$$

اگر ماتریس P موجود باشد بطوریکه

$$P^{-1}AP=D=[\lambda_i]_{i=1}^{m}$$

و D یک ماتریس قطری با عناصر قطری λ_i باشد داریم:

$$P^{-1}e^{At}P=P^{-1}\left(I+At+\frac{(At)^2}{2!}+\cdots\right)P$$

$$=I+Dt+\frac{(Dt)^2}{2!}+\cdots=e^{Dt}$$

λ_i ها در بحث فوق مقادیر ویژهٔ A که حقیقی بوده و یا مختلط با قسمت حقیقی منفی هستند.

همچنین

$$E(\lambda_j h) = 1 + \lambda_j h + \frac{\lambda_j^2 h^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda_j^p h^p}{p!}$$

در قسمتهای قبل تعریف نمودیم: روش عددی را بطور مطلق پایدار گوئیم هرگاه:

$$|E(\lambda_j h)| < 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

بطوریکه $Re(\lambda_j) < 0$ می‌باشد.

تعریف. ناحیه‌ای در صفحه مختلط $h\,Re(\lambda_j)$ و $h\,Im(\lambda_j)$ ناحیه پایداری نامیده می‌شود که $\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| < 1$، به شرط آنکه یک روش تک گامی با λ_j حقیقی یا مختلط با قسمت حقیقی منفی بکار رفته باشد.

به عنوان مثال با بکارگیری بسط تیلور بصورت مستقیم برای $y'(t) = Ay(t)$ داریم

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \dots + \frac{h^p}{p!} y_n^{(p)}$$

$$y_{n+1} = y_n + hAy_n + \frac{h^2}{2!} A^2 y_n + \dots + \frac{h^p}{p!} A^p y_n$$

$$y_{n+1} = \left(I + Ah + \dots + \frac{(Ah)^p}{p!}\right) y_n = E(Ah)\, y_n$$

$$y_{n+1} = [E(Ah)]^{n+1} y_0 = \left(\sum_{i=0}^{p} \frac{(Ah)^i}{i!}\right)^n y_n$$

برای تعیین ناحیه پایداری روش، کافیست مقادیر ویژه ماتریس

$$M = \left(\sum_{i=0}^{p} \frac{(Ah)^i}{i!}\right)^n$$

را تعیین کرده و با توجه به مطالب فوق، ناحیه پایداری تعیین گردد.

ماتریس e^{Dt} یک ماتریس قطری با عناصر قطری $e^{\lambda_i t}$ است.

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 t+\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}+\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 t+\frac{(\lambda_2 t)^2}{2!}+\cdots & \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & 1+\lambda_m t+\cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}$$

با ضرب P^{-1} در طرفین $y'(t) = Ay(t)$ داریم:

$$\underbrace{(P^{-1}y(t))}_{V}' = P^{-1}Ay(t) = P^{-1}APP^{-1}y(t) \quad , \quad P^{-1}y(t_0) = P^{-1}y_0$$

$$\begin{cases} V(t)' = DV(t) \\ V(t_0) = V_0 \end{cases}$$

درصورت استفاده از روش سری تیلور داریم:

$$V_{n+1} = V_n + hV_n' + \frac{h^2}{2!}V_n'' + \cdots + \frac{h^p}{p!}V_n^{(p)}$$

$$V_{n+1} = V_n + hDV_n + \frac{h^2}{2!}D^2V_n + \cdots + \frac{h^p}{p!}D^pV_n$$

$$V_{n+1} = \left(I + hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \cdots + \frac{h^pD^p}{p!}\right)V_n$$

$$V_{n+1} = E(Dh)V_n$$

$$E(Dh) = I + hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \cdots + \frac{h^pD^p}{p!}$$ به طوری که

$$E(Dh) = \begin{bmatrix} E(\lambda_1 h) & 0 & & \\ 0 & E(\lambda_2 h) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & E(\lambda_m h) \end{bmatrix}$$

مثال) با استفاده از روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم داریم:

$$k_1 = h f(t_n, y_n) = h A y_n$$

$$k_2 = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) = hA\left(y_n + \frac{1}{2}hAy_n\right)$$
$$= \left(hA + \frac{1}{2}h^2A^2\right)y_n$$

$$k_3 = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) = hA\left(y_n + \frac{1}{2}hAy_n + \frac{1}{4}h^2A^2y_n\right)$$
$$= \left(hA + \frac{h^2A^2}{2} + \frac{1}{4}h^3A^3\right)y_n$$

$$k_4 = h f(t_n + h, y_n + k_3) = hA\left(y_n + hAy_n + \frac{h^2A^2}{2}y_n + \frac{1}{4}h^3A^3y_n\right)$$
$$= \left(hA + h^2A^2 + \frac{h^3A^3}{2} + \frac{1}{4}h^4A^4\right)y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}hAy_n + \frac{1}{3}\left(hA + \frac{h^2A^2}{2}\right)y_n + \frac{1}{3}\left(hA + \frac{h^2A^2}{2} + \frac{h^3A^3}{4}\right)y_n + \frac{1}{6}\left(hA + h^2A^2 + \frac{h^3A^3}{2} + \frac{h^4A^4}{4}\right)y_n$$

$$y_{n+1} = \left(1 + hA + \frac{1}{2}h^2A^2 + \frac{1}{6}h^3A^3 + \frac{1}{24}h^4A^4\right)y_n$$

$$y_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{4}\frac{(hA)^i}{i!}\right)y_n = \left(\sum_{i=0}^{4}\frac{(hA)^i}{i!}\right)^{n+1}y_0$$

مقادیر ویژه $\sum_{i=0}^{4}\frac{(hA)^i}{i!}$ بصورت $\sum_{i=0}^{4}\frac{(h\lambda_j)^i}{i!}$ است. با توجه

به شرط $|E(\lambda_j h)| < 1$ داریم:

$$h\lambda_j = \bar{h}$$

$$\left|1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2!} + \frac{\bar{h}^3}{3!} + \frac{\bar{h}^4}{4!}\right| < 1$$

$$-2.78 < h\,Re(\lambda_j) < 0$$

$$-2\sqrt{2} < h\,Im(\lambda_j) < 2\sqrt{2}$$