روشهای چندگامی : یک روش k گامی را در حالت کلی بصورت زیر معرفی میکنیم :

$$y_{n+1} = a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k+1} + h\phi(t_{n+1}, t_n, \ldots, t_{n-k+1}, y'_{n+1}, y'_n, \ldots, y'_{n-k+1}, h)$$

از این روش برای حل عددی معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$, $t \in [t_0, b]$

استفاده میکنیم . این روش را k گامی میگوئیم زیرا برای استفاده از آن در هرگام نیاز

به داشتن مقادیر تابع y و مشتق آن در بیش از یک نقطه میباشیم .

اگر تابع ϕ وابسته به y'_{n+1} نباشد آنرا صریح ، باز یا پیشگو predictor

میگویند . درغیراینصورت آنرا ضمنی ، بسته یا اصلاحگر مینامند .

خطای گسسته سازی این روش را در t_n بصورت زیر نمایش میدهیم :

$$T(y(t_n),h) = y(t_{n+1}) - a_1 y(t_n) - \cdots - a_k y(t_{n-k+1}) - h\phi(t_{n+1}, t_n, \ldots, t_{n-k+1}, y'(t_{n+1}), \ldots, y'(t_{n-k+1}))$$

اگر p بزرگترین عدد صحیح باشد که $\left|\frac{T(y(t_n),h)}{h}\right| = O(h^p)$

روش عمومی چندگامی فوق را از رتبه p مینامیم .

درصورتیکه روش چندگامی خطی باشد :

$$y_{n+1} = a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k+1} + h(b_0 y'_{n+1} + b_1 y'_n + \cdots + b_k y'_{n-k+1})$$

برای استفاده از رابطه فوق نیاز به مقادیر $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$ است که میتوان

آنها را با استفاده از روشهای تک گامی تعیین نمود . حالتهای خاصی از روش چندگامی فوق

را بصورت زیر در نظر میگیریم .

روشهای چندگامی صریح: معادله $y'(t)=f(t,y(t))$ را در نظر می‌گیریم. با انتگرالگیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$y(t_{n+1})-y(t_{n-j})=\int_{t_{n-j}}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

برای محاسبه انتگرال فوق باید روشی برای تقریب $f(t,y(t))$ از جمله روشهای درونیابی تابع در نقاط $t_n, t_{n-1},\dots,t_{n-k+1}$ را بکار گیریم. یکی از این روشها استفاده از روش درونیاب پسرو نیوتن بصورت زیر است:

$$f(t,y(t))\simeq P_{k-1}(t)=f_n+(t-t_n)\frac{\nabla f_n}{h}+(t-t_n)(t-t_{n-1})\frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2}+\cdots+(t-t_n)(t-t_{n-1})\cdots(t-t_{n-k+2})\frac{\nabla^{k-1}f_n}{(k-1)!h^{k-1}}+\frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})\cdots(t-t_{n-k+1})}{k!}f^{(k)}(\xi)$$

بطوریکه $\xi\in[t_n,t_{n-k+1}]$ ، با فرض $u=\frac{t-t_n}{h}$ داریم:

$$P_{k-1}(hu+t_n)=f_n+u\nabla f_n+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{u(u+1)\cdots(u+k-2)}{(k-1)!}\nabla^{k-1}f_n+h^k\frac{u(u+1)\cdots(u+k-1)}{k!}f^{(k)}(\xi)$$

$$\binom{-u}{m}=\frac{(-1)^m u(u+1)\cdots(u+m-1)}{m!}$$

بنابراین

$$P_{k-1}(t_n+hu)=\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\binom{-u}{m}\nabla^m f_n+(-1)^k\binom{-u}{k}h^k f^{(k)}(\xi)$$

با استفاده از $dt=h\,du$ و رابطه فوق داریم

$$y(t_{n+1})=y(t_{n-j})+h\int_{-j}^{1}\left[\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\binom{-u}{m}\nabla^m f_n+(-1)^k\binom{-u}{k}h^k f^{(k)}(\xi)\right]du$$

بطوریکه $u=\frac{t_{n-j}-t_n}{h}=\frac{-jh}{h}=-j$ حد پایین را نتیجه می‌دهد.

بنابر این

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-j}) + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m^{(j)} \nabla^m f_n + T_k^{(j)}$$

بطوریکه

$$T_k^{(j)} = h^{k+1} \int_{-j}^{1} (-1)^k \binom{-u}{k} f^{(k)}(\xi)\, du$$

و

$$\gamma_m^{(j)} = \int_{-j}^{1} (-1)^m \binom{-u}{m} du$$

با حذف جمله‌ی باقیمانده داریم:

$$y_{n+1} = y_{n-j} + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m^{(j)} \nabla^m f_n \qquad (1)$$

این رابطه برای مقادیر مختلف k و j، فرمولهای مختلفی را نتیجه خواهد داد.

$$\gamma_0^{(j)} = \int_{-j}^{1} du = 1+j,$$

$$\gamma_1^{(j)} = \int_{-j}^{1} u\, du = \frac{1}{2}(1-j^2)$$

$$\gamma_2^{(j)} = \int_{-j}^{1} \frac{1}{2} u(u+1)\, du = \frac{1}{12}(5-3j^2+2j^3)$$

$$\vdots$$

توجه می‌کنیم که برای سادگی فرمول فوق می‌توان قرار داد:

$$\nabla^m f_n = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} f_{n-p}$$

که با جایگزینی این رابطه در (1) و ساده کردن داریم:

$$y_{n-1} = y_{n-j} + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m^{*(j)} f_{n-m}$$

بطوریکه $\gamma_m^{*(j)}$ در جدولی محاسبه شده و آماده است.

توجه: خطای حذف شده نشان می‌دهد $\left(\frac{T}{h}\right) = O(h^k)$

1) Adams-Bashforth method $(j=0)$: روش آدامز بشفورث

از روابط قبل برای $(j=0)$ داریم :

$\gamma_0^{(0)} = 1,$

$\gamma_1^{(0)} = \frac{1}{2},$

$\gamma_2^{(0)} = \frac{5}{12}, \ldots$

بنابراین :

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \ldots\right].$$

روابط قبل نشان می دهد که در رتبهٔ خطای K ، سری تا $K-1$ ادامه دارد.

بنابراین برای آنکه بخواهیم رتبهٔ خطا K باشد باید تا $\nabla^{K-1} f_n$ ادامه دهیم.

به عنوان مثال برای آنکه رتبهٔ خطا ۳ باشد لازم است :

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n\right]$$

1) Nystrom formula $(j=1)$: روش نیشترم

در این حالت :

$\gamma_0^{(1)} = 1+j\Big|_{j=1} = 2$

$\gamma_1^{(1)} = 0 \qquad \gamma_2^{(1)} = \frac{1}{3}, \ldots$

نتایج عددی بدست آمده توسط دو روش نیشترم و آدامز- بشفورث نشان می دهد که روش نیشترم معمولاً ضعیف تر عمل می کند.

روش چندگامی ضمنی: همانند قسمت عمل کرده و با انتگرال‌گیری از t_{n-j} تا t_{n+1} داریم:

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-j}) + \int_{t_{n-j}}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt$$

با استفاده از روش تفاضلی پسرو، f را به کمک نقاط $t_{n+1}, t_n, \dots, t_{n-k+1}$ میان تقریب می‌زنیم که در آن y_{n+1} نیز بکار رود.

$$P_k(\tilde{u}) = f_{n+1} + \tilde{u} \nabla f_{n+1} + \frac{\tilde{u}(\tilde{u}+1)}{2!} \nabla^2 f_{n+1} + \dots + \frac{\tilde{u}(\tilde{u}+1)\dots(\tilde{u}+k-1)}{k!} \nabla^k f_{n+1} + h^{k+1} \frac{\tilde{u}\dots(\tilde{u}+k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

بطور کلی:

$$\tilde{u} = \frac{t - t_{n+1}}{h} = \frac{t - t_n - h}{h} = u - 1$$

$$P_k(u) = f_{n+1} + (u-1)\nabla f_{n+1} + \frac{(u-1)(u)}{2!} \nabla^2 f_{n+1} + \dots + \frac{(u-1)\dots(u+k-2)}{k!} \nabla^k f_{n+1} + h^{k+1} \frac{(u-1)\dots(u+k-1)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

$$= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{1-u}{m} \nabla^m f_{n+1} + (-1)^{k+1} \binom{1-u}{k+1} h^{k+1} f^{(k+1)}(\xi)$$

بنابراین:

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-j}) + h \int_{-j}^{1} \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{1-u}{m} \nabla^m f_{n+1}\, du + \int_{-j}^{1} (-1)^{k+1} \binom{1-u}{k+1} h^{k+1} f^{(k+1)}(\xi)\, du$$

به عبارت معادل:

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-j}) + h \sum_{m=0}^{k} \delta_m^{(j)} \nabla^m f_{n+1} + T_{k+1}^{(j)}$$

به طوری که

$$\delta_m^{(j)} = \int_{-j}^{1} (-1)^m \binom{1-u}{m} du ,$$

$$T_{k+1}^{(j)} = h^{k+2} \int_{-j}^{1} (-1)^{k+1} \binom{1-u}{k+1} f^{(k+1)}(\xi) du$$

رابطه فوق نشان می دهد مرتبه روش $O(h^{k+1})$ است و برای آنکه مرتبه خطا $k+1$ باشد لازم است سری را تا $\nabla^k f_{n+1}$ ادامه دهیم.

با حذف جمله خطا داریم:

$$y_{n+1} = y_{n-j} + h \sum_{m=0}^{k} \delta_m^{(j)} \nabla^m f_{n+1}$$

$$\delta_0^{(j)} = 1+j , \quad \delta_1^{(j)} = -\frac{1}{2}(1+j)^2 , \quad \delta_2^{(j)} = \frac{-1}{12}(1+j)^2(1-2j) , \ldots$$

به صورت معادل:

$$y_{n+1} = y_{n-j} + h \sum_{m=0}^{k} \delta_m^{*(j)} f_{n-m+1}$$

روش آدامز - مولتون: 1) Adams-Multon $(j=0)$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{n+1} - \cdots \right]$$

ضرایب سطر فوق در جدول در کتاب موجود است.

روش میلن سیمپسون ۲) Milne-Simpson method $(j=1)$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h \left(2 f_{n+1} - 2 \nabla f_{n+1} + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{n+1} + \cdots \right)$$

ضرایب سطر در جدول در کتاب موجود است.

به دلیل آنکه برخی جملات در این روش صفر هستند استفاده از k یا $k-1$ یک نوع جمع را نتیجه خواهد داد.

روش چندگامی مبتنی بر مشتق گیری :

در این روش از تقریب $y(t)$ توسط یک چندجمله‌ای درونیاب استفاده می‌کنیم.

فرض کنید

$$y(t)=y_{n+1}+\frac{t-t_{n+1}}{h}\nabla y_{n+1}+(t-t_{n+1})(t-t_n)\nabla^2 y_{n+1}$$
$$+\cdots+\frac{(t-t_{n+1})\cdots(t-t_{n-k+1})}{k!\,h^k}\nabla^k y_{n+1}+\cdots$$

در اینصورت

$$y'(t)=\frac{1}{h}\nabla y_{n+1}+\frac{(t-t_n)+(t-t_{n+1})}{2!\,h^2}\nabla^2 y_{n+1}+\cdots$$

$$h\,y'(t_{n+1})=\nabla y_{n+1}+\frac{1}{2}\nabla^2 y_{n+1}+\cdots$$

$$hDy(t)\Big|_{t=t_{n+1}}=\left(\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\cdots\right)y_{n+1}$$

$$hDy(t)\Big|_{t=t_{n+1}}=-\log(1-\nabla)y_{n+1}$$

بنابراین با فرض $hD=-\log(1-\nabla)$ داریم :

$$y'(t)=f(t,y(t))$$

$$Dy(t)=f(t,y(t))\Rightarrow hDy(t)=f(t,y(t))$$

$$-\log(1-\nabla)y_{n+1}=f(t_{n+1},y(t_{n+1}))$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nabla^k}{k!}\right)y_{n+1}=f(t_{n+1},y(t_{n+1}))$$

$$\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{\nabla^k}{k!}\right)y_{n+1}=f(t_{n+1},y_{n+1})$$

با استفاده از بسط $\nabla^m y_{n+1}$ داریم :

$$\sum_{m=0}^{k}\gamma_m\, y_{n-m+1}=h f_{n+1}$$

که ضرایب γ_m در جدول ۳.۹ محاسبه شده است .

بدیهی است همانند مشتقهای قبل خطای قطع از مرتبه $O(h^{k+1})$ است پس مرتبه روش $O(h^k)$ است .