روش تفاضلات متناهی در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اغلب مسائل در علوم که وابسته به ۲ یا چند متغیر است که معمولاً زمان، طول زاویه و ... را نشان می‌دهند، منجر به ایجاد یک یا چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌شود. حالتهای خاصی از یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم بصورت

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+d\frac{\partial\phi}{\partial x}+e\frac{\partial\phi}{\partial y}+f\phi+g=0$$

بطوریکه a و b و c و d و e و g ممکن است توابعی از x و y و یا حتی ϕ باشند، بسیار پرکاربرد است زیرا اغلب فرمول‌بندی از پدیده‌های فیزیکی معروفی می‌باشند. برای دلایلی که بعداً بیان خواهد شد این معادله را

بیضوی می‌گوئیم هرگاه $b^2-4ac<0$

سهموی گوئیم هرگاه $b^2-4ac=0$

و هذلولوی گوئیم هرگاه $b^2-4ac>0$.

معادلات بیضوی دوبعدی:

این معادلات دارای معروفترین شکل

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+g=0$$

که معادله پواسن نامیده می‌شود و

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

که معادله لاپلاس نامیده می‌شود.

تنها در حالتهای بسیار ساده از معادلات با مشتقات جزئی، جواب تحلیلی بدست آمده است

که در چنین حالتهایی نیز، با تغییر ناحیهٔ جواب مسئله (دامنهٔ مسئله) به حالتهای پیچیده‌تر این جوابها بصورت تحلیلی قابل محاسبه نیستند و بنابراین لازم است روشهای تقریبی برای آنها بکار رود.

معادلات سهموی و هذلولوی:

مسائلی که شامل زمان t به عنوان یک متغیر مستقل در نظر گرفته می‌شود، معمولاً منجر به تولید معادلات سهموی و بیضوی می‌گردد. ساده‌ترین معادلهٔ سهموی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in [0, l]$$

که مربوط به مسائل انتقال گرما است و $u(x,t)$ مقدار گرما را در زمان t و مکان x نشان می‌دهد. در چنین حالتی معمولاً شرایط بصورت کرانه‌ای داده می‌شوند. روش تفاضلات متناهی روی معادلات بیضوی و سهموی بصورت یکسان بکاربرده می‌شود، اما ساختار جبری در آنها متفاوت است. در معادلات وابسته به زمان، معمولاً جوابها از یک گام قبلی برای پیش جواب در گام بعدی بکار می‌رود.

معادلات هذلولوی معمولاً از مسائلی که در آنها ارتعاش موجود است، شکل می‌گیرد. یا این معادلات از مسائلی که در آنها در زمان ناپیوستگی‌هایی اتفاق می‌افتد شکل می‌گیرد. ساده‌ترین شکل این معادلات

معادلات موج هستند :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تقریبات تفاضلات متناهی برای مشتقات :

$$u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{1}{2} h^2 u''(x) + \frac{1}{6} h^3 u'''(x) + \cdots$$

$$u(x-h) = u(x) - h u'(x) + \frac{1}{2} h^2 u''(x) + \frac{(-1)}{6} h^3 u'''(x) + \cdots$$

$$u''(x) = \frac{1}{h^2}\left[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\right] + o(h^2)$$

$$u'(x) = \frac{1}{2h}\left[u(x+h) - u(x-h)\right] + o(h^2)$$

$$u'(x) = \frac{1}{h}\left(u(x+h) - u(x)\right) + o(h)$$

$$u'(x) = \frac{1}{h}\left(u(x) - u(x-h)\right) + o(h)$$

نامگذاری برای صفحه متغیر ،

فرض کنید $u=u(x,t)$. صفحه‌ی x-t را شبکه‌بندی می‌نمائیم با طولهای $\delta x = h$ ، $\delta t = k$ و $x_i = ih$ و $t_j = jk$ ، $i,j = 0,1,2,\dots$. مقدار u را در نقطه‌ای از شبکه با مختصات $P(ih,jk)$ بصورت

$$u_p = u(ih,jk) = u_{i,j}$$

نمایش می‌دهیم . دراینصورت بطور معادل با روابط فوق داریم :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{(i+1)h,jk} - 2u_{ih,jk} + u_{(i-1)h,jk}}{h^2} + o(h^2)$$

با معادلاً

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

بطور مشابه:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k)$$

معادلات سهموی، تفاضلات متناهی، همگرایی و پایداری:

یک فرم صریح از جواب، معادلهٔ سهموی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$x_i = ih, \quad t_j = jk, \quad i,j = 0,1,2,\ldots$$

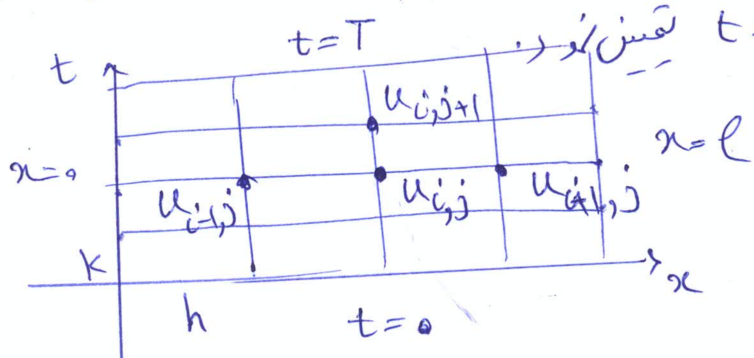
معادلاً داریم:

$$u_{i,j+1} = r u_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + r u_{i+1,j}$$

بطوریکه

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} = \frac{k}{h^2}$$

اکنون با استفاده از مقدار u در $t=0$ می‌توان مقدار u را در مرحله بعد یعنی $t=k$ تعیین نمود.



با ادامه این روند کلیه مقادیر u در ناحیه مفروض تعیین می گردد.

مثال) حالت اول :

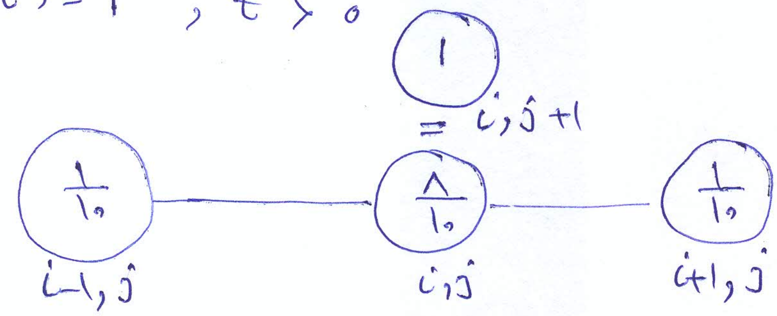
$$\delta x = h = \frac{1}{10}$$
$$\delta t = k = \frac{1}{1000} \Rightarrow r = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{10}$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{10}\left(u_{i-1,j} + 8u_{i,j} + u_{i+1,j}\right)$$

با شرایط

$$\begin{cases} u = 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ u = 2(1-x), & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}, \quad t = 0$$

$$u(0,t) = 1 \quad , t > 0$$



$$u = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x \, e^{-n^2\pi^2 t}$$

حالت دوم :

$$\delta x = h = \frac{1}{10}, \quad \delta t = k = \frac{5}{1000}, \quad r = \frac{k}{h^2} = 0.5$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right)$$

حالت سوم :

$$\delta x = \frac{1}{10}, \quad \delta t = \frac{1}{100}, \quad r = \frac{k}{h^2} = 1$$

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i-1,j}$$

جوابهای هر سه حالت در جداول زیر تعیین شده اند.

همانطور که این نتایج نشان می دهند برای مقادیر مختلف r دقت جوابها متفاوت است و مقدار r می تواند روی دقت جواب مؤثر باشد. بعداً نشان می دهیم که مقادیر مجاز برای r در این حالت $0 < r \le \frac{1}{2}$ است. یا $0 < \frac{k}{h^2} \le \frac{1}{2}$
و بنابراین: $k \le \frac{1}{2}h^2$

روش ضمنی کرانک - نیکلسون: اگر روش صریح فوق ساده بود، ولی شرط فوق بسیار محدود کننده است. $k \le \frac{1}{2}h^2$ سبب می شود که k را بسیار کوچک بگیریم. h نیز باید کوچک باشد تا جوابهای قابل قبولی اختیار کنیم.

کرانک و نیکلسون در ۱۹۴۷ روشی را ارائه دادند که تعداد گامها در آنها نباید بسیار کوچک باشد و جواب این روش دقت بیشتری را داراست.

در این روش، معادله را در یک نقطه میانی $\{ih, (j+\frac{1}{2})k\}$ بیان می کنند. یا

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \qquad (2-9)$$

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}\right\}$$

که رابطه زیر را نتیجه می دهد:

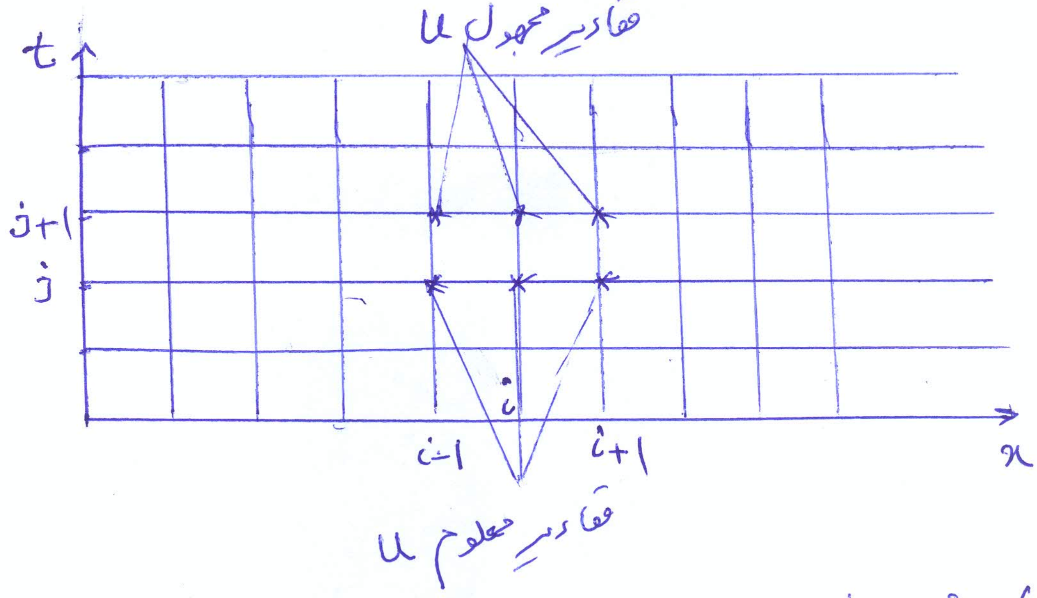
$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - 2u_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \qquad (2-10)$$

و

$r = \frac{k}{h^2}$

لفوریه

رابطهٔ (۲-۱۰) برای $j=0$ و $i=1,2,\ldots,N-1$ یک دستگاه مربعی را نمایش می‌دهد که با حل آن مقادیر مجهول u تعیین می‌گردند. (شکل ۲،۴)



بطور مشابه برای $j=1$ و $j=2$ و ... و $j=N-1$ با حل این دستگاه سایر مقادیر مجهول u طبق دستگاه (۲-۱۰) تعیین می‌گردد.

رابطهٔ (۲-۹) را بصورت زیر نیز بازنویسی می‌توان کرد.

$$\frac{1}{k}\delta_t u_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}h^{-2}\left\{\delta_x^2 u_{i,j+1} + \delta_x^2 u_{i,j}\right\}$$

مثال ۲.۲ : روش کرانک رابرای

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\ t>0$$

$$u=0,\quad x=0,1,\quad t\geq 0 \quad \text{یا} \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad t>0$$

$$\begin{cases} u(x,0)=0, & 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ u(x,0)=2(1-x), & \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

پیاده‌سازی نمائید. همانند رابطهٔ (۲-۱۰) عمل نمائید.

حل: برای $r=\frac{k}{h^2}$ و $h=\frac{1}{10}$، اگر $r=1$ انتخاب گردد، ضریب $u_{i,j}$ در (۱۰-۲) صفر شود. (البته هر مقداری از r را می‌توان انتخاب نمود). در اینصورت مانند (۱۰-۲) داریم:

$$-u_{i-1,j+1}+4u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}=u_{i-1,j}+u_{i+1,j}$$

برای $j=0$ داریم، (برای اختصار $u_{i,j+1}$ را با u_i نمایش می‌دهیم)

$$0+4u_1-u_2=0+0.4,\qquad u_6=u_4$$

$$-u_1+4u_2-u_3=0.2+0.6,\qquad u_7=u_3$$

$$-u_2+4u_3-u_4=0.4+0.8\qquad u_8=u_2$$

$$-u_3+4u_4-u_5=0.6+1\qquad u_9=u_1$$

$$-2u_4+4u_5=0.8+0.8\qquad u_{10}=u_0$$

در اینصورت، $u_1=0.1989,\ u_2=0.3956,\ u_3=0.5834$

$u_4=0.7381,\ u_5=0.7691$

به همین ترتیب برای $j=1,\ j=2,\ \ldots,\ j=N-1$ حل می‌کنیم

یک تقریب میانگین وزن‌دار:

یک حالت کلی‌تر از روش کرانک-نیکلسون را بصورت زیر می‌توان درنظر گرفت،

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\delta t}=\frac{1}{(\delta x)^2}\Big\{\theta\left(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}\right)+(1-\theta)\left(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right)\Big\}$$

$$\frac{1}{\delta t}\delta_t u_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{(\delta x)^2}\left\{\theta\,\delta_x^2 u_{i,j+1}+(1-\theta)\delta_x^2 u_{i,j}\right\}$$ یا

مثال ۲.۳ : (شرایط مرزی دارای مشتق)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0)=1\ ,\quad 0\leq x\leq 1$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=u(0,t)\ ,\quad t\geq 0$$ شرط مرزی دارای مشتق

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=-u(1,t)\ ,\quad t\geq 0$$ شرط مرزی دارای مشتق

حل :

شکل صریح روش تفاضلات متناهی روی معادله فوق به صورت زیر قابل بیان است :

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\delta t}=\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{(\delta x)^2}$$

یا

$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+r\left(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}-2u_{i,j}\right)\quad (2-15)$$

$$r=\frac{k}{h^2}=\frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

$$x=0:\ u_{0,j+1}=u_{0,j}+r\left(u_{-1,j}+u_{1,j}-2u_{0,j}\right)$$

شرایط مرزی $x=0$ ؛ $\frac{u_{1,j}-u_{-1,j}}{2\delta x}=u_{0,j}$

با درنظرگرفتن $u_{-1,j}=0$ داریم :

$$(2-18)\quad u_{0,j+1}=u_{0,j}+2r\left(u_{1,j}-(1+\delta x)u_{0,j}\right)$$

مانند (۲-۱۵)

$$\delta x=0.1\ ,\ x=1\ ;\ u_{10,j+1}=u_{10,j}+r\left(u_{9,j}-2u_{10,j}+u_{11,j}\right)$$

و با شرایط مرزی:

$$\frac{u_{11,j}-u_{9,j}}{2\delta x} = -u_{10,j}$$

با حذف $u_{11,j}$ داریم:

$$u_{10,j+1} = u_{10,j} + 2r\left(u_{9,j} - (1+\delta x)u_{10,j}\right) \qquad (2\text{-}21)$$

با انتخاب $r=\frac{1}{4}$ روابط (2-15) و (2-18) بصورت زیر تبدیل می‌گردند:

$$u_{0,j+1} = \frac{1}{2}\left(0.9\,u_{0,j} + u_{1,j}\right)$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right),\quad i=1,\dots,4$$

و با استفاده از تقارن داریم:

$$u_{5,j+1} = \frac{1}{4}\left(2u_{4,j} + 2u_{5,j}\right)$$

$$u_{0,1} = \frac{1}{2}(0.9+1) = 0.95$$

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1 = u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = u_{5,1}$$

$$u_{0,2} = \frac{1}{2}(0.9 * 0.95 + 1) = 0.9275$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}(0.95+2+1) = 0.9875$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1 = u_{3,2} = u_{4,2} = u_{5,2}$$

بطور مشابه برای مقادیر دیگری از j، مقادیر مجهول u بدست می‌آید.

مثالهای ۲٫۴ و ۲٫۵ را نیز مطالعه نمائید.

خطای برشی و سازگاری :

خطای برشی : فرض کنیم $F_{i,j}(u)=0$ معادله تفاضل متناظر با روش صریح را نمایش می دهد. اگر به جای u، در این رابطه مقدار U را که همان جواب دقیق مشتقات است، جایگزین نمائیم و آنرا $T_{i,j}$ بنامیم، این مقدار را خطای برشی موضعی روش می نامند که در مثال زیر آنرا توصیف نموده ایم. با استفاده از بسط تیلور $T_{i,j}$ را برحسب h و k نمایش می دهیم. اگر در $\begin{cases} h\to 0 \\ k\to 0 \end{cases}$، $T_{i,j}$ به سمت صفر میل نمود، روش را سازگار می نامیم.

مثال ۲.۶ : رتبه خطای برشی را برای یک روش صریح در $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در نقطه $\{ih, jk\}$ محاسبه کنید.

$$F_{i,j}(u)=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}-\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}=0$$

بنابراین :

$$T_{i,j}=F_{i,j}(U)=\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{k}-\frac{U_{i-1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}}{h^2}$$

$$U_{i+1,j}=U\{(i+1)h, jk\}=u(x_i+h,t_j)=$$

$$U_{i,j}+h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j}+\frac{1}{6}h^3\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{i,j}+\cdots$$

$$U_{i-1,j}=U_{i,j}-h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j}-\frac{1}{6}h^3\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{i,j}+\cdots$$

$$U_{i,j+1}=U\{ih,(k+1)j\}=U(x_i,t_j+k)$$

$$=U_{i,j}+k\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}k^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_{i,j}-\frac{1}{6}k^3\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\right)_{i,j}+\cdots$$

با جایگزینی در $T_{i,j}$ فوق داریم.

$$T_{i,j}=\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j}}_{\text{صفر}}+\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_{i,j}-\frac{1}{12}h^2\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right)_{i,j}+$$

$$\frac{1}{6}k^2\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\right)_{i,j}-\frac{1}{360}h^4\left(\frac{\partial^6 U}{\partial x^6}\right)_{i,j}+\dots$$

بنابراین با توجه به قسمتهایی که دارای کمترین توان k و h هستند داریم:

$$T_{i,j}=O(k)+O(h^2)$$

$$T_{i,j}=\frac{1}{12}h^2\left(6\frac{k}{h^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right)+O(k^2)+O(h^4)$$ -

از طرفی $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مفروض) داریم، &

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$$

اگر $6\frac{k}{h^2}=1$ انتخاب گردد، $T_{i,j}=O(k^2)+O(h^4)$ خواهد شد.

پس برای $r=\frac{k}{h^2}=\frac{1}{6}$ خطای روش نسبت به k از رتبهٔ ۲ و نسبت به h از رتبهٔ ۴ خواهد بود. اما این محاسبات را بسیار افزایش می دهد و عملی نیست.

برای مثال، برای $h=0.1$ داریم $k=\frac{0.01}{6}=0.0016$.

اگر $\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} T_{i,j}=0 \Rightarrow$ روش را سازگار می نامیم. $\Rightarrow$ روش فوق سازگار بود برای r.

مثال ۲.۷ را مطالعه بفرمائید.

همگرایی روش: برای بررسی همگرایی یک روش عددی، لازم است درستی رابطه

$$\lim_{h,k\to 0} u(ih,jk) = U(ih,jk)$$

بررسی گردد. به عبارت دیگر یک روش عددی را همگرا نامیم هرگاه در $\begin{cases} h\to 0 \\ k\to 0 \end{cases}$ تقریب مورد نظر به مقدار دقیق میل نماید. یکی از روشهای معمول در بررسی همگرایی یک روش تعیین کرانی از خطا بصورت

$$|u_{i,j}-U_{i,j}| \leq M h^m k^s, \quad m,s>0$$

میباشد که با استفاده از حد گرفتن رابطه فوق ثابت میشود، روش همگراست. اما تعیین چنین کرانی معمولاً مشکل است. اما در روشهای تفاضلی که روی معادلات سهموی و هذلولوی خطی پیاده سازی میشود، با استفاده از بررسی سازگاری و پایداری روش قابل بررسی است. (قضیه هم ارزی Lax)

در یک مسئله خوش وضع: همگرایی $\Longleftrightarrow$ پایداری و سازگاری

همگرایی $\Longleftrightarrow$ پایداری : یک مسئله خوش وضع و سازگار ؛ قضیه هم ارزی Lax

مثال) روش صریح مطرح شده در بحثهای قبل را روی یک معادله گرما بررسی میکنیم.

یک مسئله را خوش وضع نامیم هرگاه:

۱) مسئله دارای جواب یکتا باشد

۲) جواب بطور پیوسته به دادهها وابسته باشد.

۳) هرگاه دادههای اولیه تغییر کند، همواره جواب مسئله موجود باشد.

فرض کنیم شرایط فوق روی $0<x<1,\ t>0$ ، $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ برقرار باشد و شرایط کرانی و اولیه متناظر در $t=0$ و $0\le x\le 1$، همچنین در $x=0,1$ و $t\geq 0$ داده شده است. در روش تفاضلات متناهی صریح داریم:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}$$

یا

$$\text{(I)}\quad u_{i,j+1} = r u_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + r u_{i+1,j}, \quad i=1,\dots,N-1$$

و در خطای برشی داریم:

$$T_{i,j} = \frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{k} - \frac{U_{i-1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}}{h^2}$$

یا

$$\text{(II)}\quad U_{i,j+1} = kT_{i,j} + rU_{i-1,j} + (1-2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j}$$

$$r=\frac{k}{h^2}$$

برای $i=1,\dots,N-1$ داریم:

شکل ماتریسی (I):

$$\underset{\text{بردار}}{u_{j+1}} = \overset{\text{ماتریس}}{A}\,\overset{\text{بردار}}{u_j} + \overset{\text{بردار}}{c_j}$$

با جایگذاری تو در تو:

$$\text{(III)}\quad u_{j+1} = A^{j+1}u_0 + (c_j + Ac_{j-1} + \dots + c_0)$$

شکل ماتریسی (II):

$$\underset{\text{بردار}}{U_{j+1}} = k\underset{\text{بردار}}{T_j} + \begin{bmatrix} 1-2r & r & \dots & \\ r & 1-2r & r & \dots \\ & & \ddots & \\ \dots & & r & 1-2r \end{bmatrix} U_j + \begin{bmatrix} rU_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rU_{N,j} \end{bmatrix}$$

یا

$$U_{j+1} = kT_j + AU_j + C_j$$

یا

$$(IV)\quad U_{j+1} = K\left(T_j + AT_{j-1} + \cdots + A^j T_0\right) + A^{j+1} U_0 + \left(C_j + AC_{j-1} + \cdots + A^j C_0\right)$$

با استفاده از (III) و (IV) داریم:

$$U_{j+1} - u_{j+1} = K\left(T_j + AT_{j-1} + \cdots + A^j T_0\right) + A^{j+1}\left(U_0 - u_0\right)$$

اما چون $U_0 - u_0 = 0$ داریم:

$$U_{j+1} - u_{j+1} = K\left(T_j + AT_{j-1} + \cdots + A^j T_0\right)$$

$$\|U_{j+1} - u_{j+1}\| \le K\left(\|T_j\| + \|A\|\,\|T_{j-1}\| + \cdots + \|A^j\|\,\|T_0\|\right)$$

اما با استفاده از شرط $\|A^j\| \le M$ ، $j = 1, \dots, N$ که همان شرط پایداری Lax است و در حد و با فرض سازگاری $\lim_{k\to 0} T_j = 0$ برقرار است.

$$\lim_{k\to 0} T_j = \lim_{\substack{k\to 0\\ j\to\infty}} T_j = 0 \quad \text{یا} \quad \|T_j\| \le C \;\; (k\to 0)$$

در $k\to 0$ داریم $j\to\infty$.

$$\|U_{j+1} - u_{j+1}\| \le K\|T_j\| + KM\left(\|T_{j-1}\| + \cdots + \|T_0\|\right)$$

$$\le KC + KMjC = KC + MCt$$

~~$\le KC +$~~

که

$$Kj = t \le T = NK \quad (k\to 0,\; j\to\infty)$$

با فرض سازگاری $C \to 0$ بنابراین $u_{j+1} \to U_{j+1}$ و روش همگراست.

استفاده از بسط تیلور در نمایش همگرایی ! معادله زیر را در نظر بگیرید !

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,,\quad 0<x<1\,,\ t>0$$

که در $t=0$ و $x=0\,,1$ ، مقادیر U داده شده اند. در روش صریح داشتیم :

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

$u_{i,j}=U_{i,j}-e_{i,j}$ تعریف می کنیم :

لذا بصورت :

$$(I)\quad e_{i,j+1}=re_{i-1,j}+(1-2r)e_{i,j}+re_{i+1,j}+U_{i,j+1}-U_{i,j}+r\left(2U_{i,j}-U_{i-1,j}-U_{i+1,j}\right)$$

به کمک بسط تیلور ! آرگومان U

$$U_{i+1,j}=U_{i,j}+h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j}+\underbrace{\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i+\theta_1 h,t_j)}$$

باقیمانده

$$U_{i-1,j}=U_{i,j}-h\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j}+\underbrace{\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i+\theta_2 h,t_j)}$$

باقیمانده

$$U_{i,j+1}=U_{i,j}+k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j}+\underbrace{\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i,t_j+\theta_3 k)}$$

باقیمانده

که $0<\theta_i<1\,,\ 1\leq i\leq 3$. با جایگذاری این روابط در (I) داریم :

$$e_{i,j+1}=re_{i-1,j}+(1-2r)e_{i,j}+re_{i+1,j}+k\left\{\frac{\partial U}{\partial t}(x_i,t_j+\theta_3 k)-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i+\theta_4 h,t_j)\right\}$$

بطوریکه $-1<\theta_4<1$.

الف) $r \le \frac{1}{2}$

معادله داریم:

$$|e_{i,j+1}| \le r|e_{i-1,j}| + (1-2r)|e_{i,j}| + r|e_{i+1,j}| + KM$$

$$\le rE_j + (1-2r)E_j + rE_j + KM = E_j + KM$$

چون $r \le \frac{1}{2}$ در نظر گرفته شد. بنابراین:

$$E_{j+1} \le E_j + KM \le (E_{j-1} + KM) + KM = E_{j-1} + 2KM$$

$$E_{j+1} \le E_0 + (j+1)KM$$

یا $E_j \le \underset{\downarrow}{E_0} + jKM = tM \quad jK = t \le T = NK$
$\ 0$

وقتی h به سمت صفر، از $K = rh^2$ نتیجه می‌شود $K \to 0$، بنابراین M به سمت $\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j}$ میل می‌کند که صفر است. پس $M \to 0$. یعنی $E_j \to 0$. یا $u_{i,j} \to U_{i,j}$ و روش همگرا است.

ب) $r > \frac{1}{2}$ در این حالت روش همگرا است.

بحث در پایداری: با استفاده از روش ماتریسی فوق داریم

ماتریس

$$\underset{\text{بردار}}{u_{j+1}} = A\underset{\text{بردار}}{u_j} + \underset{\text{بردار}}{b_j} = A^{j+1}u_0 + (b_j + Ab_{j-1} + \dots + A^{j+1}b_0)$$

روش عددی فوق را پایدار گوییم هرگاه با افزایش تعداد گامها، خطاها بی‌کران رشد نکنند.

برای اینکه در رابطه فوق خطاها با $j \to \infty$ بی‌کران رشد نکنند، لازم است $\|A\| \le 1$ باشد که این همان شرط پایداری روش است. این امر سبب کنترل خطاهای گرد کردن و جلوگیری از افزایش بی‌کران آنها می‌شود.