



دانشگاه خوارزمی گیلان

مدرس: دکتر حمید خالوزاده

بسمه تعالی

کنترل تصادفی

تمرین سری پنجم

دانشکده برق

گروه کنترل

مهلت تحویل: ۹۵/۰۲/۲۸

سوالات منتخب کتاب (فصل ۵ از مرجع اول):

گروه ۱: ۱۱-۱۰-۶

گروه ۲: ۱۱-۱۰-۷

سوالات مشترک

۱) فرض کنید که میانگین و واریانس متغیر تصادفی  $X$  را می دانیم. ثابت کنید که، میانگین متغیر تصادفی  $X$  بهترین عدد ثابتی است که می تواند آن را تخمین زده و تابع هزینه زیر را کمینه سازد ( $\hat{X}$  تخمینگر متغیر تصادفی  $X$  است). همچنین ثابت کنید که واریانس خطای تخمین با واریانس متغیر تصادفی  $X$  برابر است.

$$J = E \{ (X - \hat{X})^T (X - \hat{X}) \}$$

۲) فرض کنید که بردار تصادفی  $Y$  از ۲ قسمت  $Z$  و  $X$  تشکیل شده است.  $Z$  مشاهدات ما هستند و  $X$  قسمتی از بردار تصادفی  $Y$  است که می خواهیم آن را با توجه به مشاهدات تخمین بزنیم، به نحوی که تابع هزینه سوال قبل کمینه شود. تابع چگالی احتمال  $Y$  به صورت زیر می باشد.

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \rightarrow f_Y = f_{X,Z} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_X+n_Z} |\Sigma_Y|}} \exp \left[ -\frac{(y - E(Y))^T \Sigma_Y^{-1} (y - E(Y))}{2} \right]$$

$$E(Y) = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Z) \end{bmatrix}, \Sigma_Y = \begin{bmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XZ} \\ \Sigma_{ZX} & \Sigma_Z \end{bmatrix} \rightarrow \Sigma_Y^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & -D^{-1} \Sigma_{XZ} \Sigma_Z^{-1} \\ -\Sigma_Z^{-1} \Sigma_{ZX} D^{-1} & \Sigma_Z^{-1} + \Sigma_Z^{-1} \Sigma_{ZX} D^{-1} \Sigma_{XZ} \Sigma_Z^{-1} \end{bmatrix}, D = \Sigma_X - \Sigma_{XZ} \Sigma_Z^{-1} \Sigma_{ZX}$$

الف) ثابت کنید که:

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{\sqrt{(2\pi)^{n_Z} |\Sigma_Z|}}{\sqrt{(2\pi)^{n_X+n_Z} |\Sigma_Y|}} \exp \left[ -\frac{(y - E(Y))^T \Sigma_Y^{-1} (y - E(Y)) - (z - E(Z))^T \Sigma_Z^{-1} (z - E(Z))}{2} \right]$$

راهنمایی: احتمال شرطی!

ب) ابتدا به کمک راهنمایی قسمت قبل ثابت کنید  $|\Sigma_{X|Z}| = \frac{|\Sigma_Y|}{|\Sigma_Z|}$ . سپس ۲ فرض زیر را در نظر بگیرید:

$$E(X|Z) = E(X) + \Sigma_{XZ} \Sigma_Z^{-1} (Z - E(Z))$$

$$\Sigma_{X|Z} = \Sigma_X - \Sigma_{XZ} \Sigma_Z^{-1} \Sigma_{ZX}$$

حال ثابت کنید که:

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_X} |\Sigma_{X|Z}|}} \exp \left( -\frac{(X - E(X|Z=z))^T \Sigma_{X|Z}^{-1} (X - E(X|Z=z))}{2} \right)$$

ج) با توجه به نتیجه قسمت قبل و سوال ۱، تخمینگر بهینه متغیر تصادفی  $X$  را بیابید. همچنین نشان دهید که این تخمینگر، معادل تخمینگر استاتیکی است که برای نامعینی بیزین سر کلاس تدریس شده است (حتما قبل از حل این قسمت سوال ۱۰ کتاب را حل کنید!).

۳) اگر فرض کنیم  $K = \Sigma_X H^T (H \Sigma_X H^T + R)^{-1}$ . با توجه به نتیجه قسمت آخر سوال قبل برای یک سیستم خطی استاتیکی، ثابت کنید که:

$$\Sigma_{X|Z} = (I - KH) \Sigma_X (I - KH)^T + KRK^T = (I - KH) \Sigma_X$$

پاسخ تمام تمرینات به پست الکترونیک درس ارسال شود [stochastic.control2016@gmail.com](mailto:stochastic.control2016@gmail.com)

موفق باشید: حمید علی خانی