



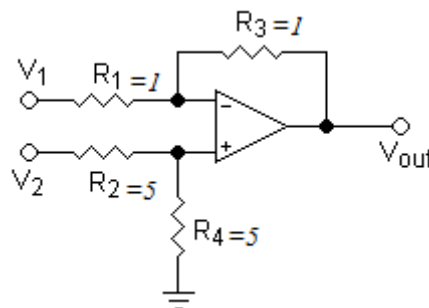
۱) برای عملگرهای میانگین و واریانس، تخمینگرهای بدون بایاس و به فرم‌های بازگشتی زیر به دست آورید (در حالت کلی چند متغیره).
 $\mu_x(k) = F[\mu_x(k-1), x(k)], \sigma_x^2(k) = G[\sigma_x^2(k), \mu_x(k-1), x(k)]$
 به تعداد کافی داده تصادفی از یک نوع توزیع تولید کرده و از لحاظ زمان اجرا، ۲ رابطه فوق را با حالت غیربازگشتی (به ازای هر داده جدید، محاسبات میانگین و واریانس از داده اول آغاز شود) مقایسه کنید. برای افزایش سرعت همگرایی روابط بازگشتی (همگرایی در تعداد تکرار کمتر)، چه پیشنهادی می‌کنید؟
 ۲) سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1.2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 12 & 1.5 \\ 1.5 & 10.2 \end{bmatrix}$$

اگر ورودی سیستم پله واحد باشد، میانگین و واریانس حالت سیستم را به ازای ۲ شرط اولیه متفاوت شبیه‌سازی کرده (به روش بازگشتی) و نتایج را با محاسبات نظری مقایسه کنید. حال اگر سیستم کنترل ناپذیر شود (با تغییری در بردار ضریب ورودی)، آیا تغییری در ماتریس کواریانس حالت ماندگار رخ خواهد داد؟ چرا؟

۳) مدار زیر را در نظر بگیرید:



$$V_{out} = V_2 \left(\frac{(R_1+R_3)R_4}{(R_2+R_4)R_1} \right) - V_1 \left(\frac{R_3}{R_1} \right)$$

که در آن: ولتاژ V_1 یک سیگنال گوسی با میانگین ۲ و واریانس ۱ و ولتاژ ورودی V_2 یک سیگنال گوسی با میانگین ۴ و واریانس ۱ می‌باشد. با ۳ سنسور به صورت زیر، ولتاژ ۳ نقطه از مدار را اندازه می‌گیریم.

ولتاژ بین ۲ مقاومت ۱ و ۳	بدون بایاس با واریانس ۱
ولتاژ بین ۲ مقاومت ۲ و ۴	بدون بایاس با واریانس ۴
ولتاژ خروجی	بدون بایاس با واریانس ۹

حال می‌خواهیم در حالات زیر، ولتاژهای ورودی مدار را تخمین بزنیم:

الف) اگر فقط از اطلاعات سنسور سوم استفاده کنیم و هیچ اطلاعاتی راجع به ورودی‌ها نداشته باشیم.

ب) اگر فقط از اطلاعات سنسور سوم استفاده کنیم و بدانیم که واریانس ورودی‌ها ماتریس واحد است.

ج) از هر ۳ سنسور استفاده کنیم و هیچ اطلاعاتی راجع به ورودی‌ها نداشته باشیم.

د) از هر ۳ سنسور استفاده کنیم و بدانیم که واریانس ورودی‌ها ماتریس واحد است.

در هر حالت به روش بازگشتی میانگین تخمین و واریانس خطای آن را رسم کرده و با نتایج نظری و حالات دیگر مقایسه کنید.

حال می‌خواهیم تاثیر خطای مدلسازی آماری و ساختاری را در تخمین ببینیم. یک بار فرض کنید که مقدار مقاومت R_2 در واقعیت ۴ بوده در حالیکه ما آن را ۵ گرفتیم و قسمت "د" را دوباره انجام دهید. بار دیگر فرض کنید که واریانس سنسور اول به اشتباه برابر با یک در نظر گرفته شده و در حقیقت ۴ بوده است و دوباره قسمت "د" را انجام دهید. نتایج شبیه‌سازی حاصل از ۲ حالت را با محاسبات نظری و با یکدیگر مقایسه کنید.

۴) سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$y(n) = \frac{[3w(n-1) + 2w(n-2) + w(n-3)]}{3} + 0.1y(n-1)$$

که در آن $w(n)$ یک نویز گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ می‌باشد. به روش بازگشتی، واریانس خروجی و حالات سیستم را به دست آورید و نتیجه را با محاسبات دستی برای حالت ماندگار مقایسه کنید. آیا می‌توان از روابط تخمین استاتیکی برای تخمین حالت سیستم فوق (بعد از رسیدن به حالت ماندگار) استفاده کرد؟ به طریق نظری و با استفاده از شبیه‌سازی صحت یا عدم صحت این مورد را بررسی کنید.

نکات مهم:

- ۱) پاسخ تمام تمرینات به پست الکترونیک درس ارسال شود stochastic.control2016@gmail.com
- ۲) تاخیر در ارسال تمرینات بر روی نمره تاثیرگذار خواهد بود. تأخیر بیش از حد قابل قبول نیست.
- ۳) در پاسخ به تمرینات و خصوصاً شبیه‌سازی‌ها، تحلیل بسیار مهم است. هدف از شبیه‌سازی درک مفاهیم است نه داشتن چند عکس

موفق باشید: حمید علی‌خانی