پاسخ سوال شماره یک

پاسخ الف:

طبق تعریف **سیستم دینامیکی به سیستمی گفته می‌شود که در آن، خروجی سیستم به ورودی آن در همان لحظه و نیز زمان‌های گذشته بستگی داشته باشد**. به عبارت دیگر سیستمی که وضعیت آن با گذر زمان در حال تغییر باشد. از آن‌جایی که در معادله (a)، متغیّر مستقل مسئله زمان است، لذا سیستم متناظر با آن یک سیستم دینامیکی است.

پاسخ ب:

به دلیل وجود جمله $\sin(x)$ در معادله (a) که در آن آرگومان تابع سینوس، متغیر میدانی مسئله؛ یعنی x است، **این معادله غیر خطی است**. توجه شود که اگر به جای $\sin(x)$، $\sin(t)$ را داشتیم، آنگاه سیستم خطی می‌بود.

پاسخ ج:

نکته: برای استخراج معادلات حالت سیستم‌هایی که به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی رسته n داده شده‌اند؛ متغیرهای حالت همان متغیر میدانی مسئله (اینجا x) و مشتقات آن تا رسته $n-1$ ($\dot{x},\ddot{x},\dots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$) هستند.

در نتیجه متغیرهای حالت این سیستم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx x(t) \\ x_2 &\approx \dot{x}(t) \;\Rightarrow\; \vec{X}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T \\ x_3 &\approx \ddot{x}(t) \end{aligned} \tag{1-1}$$

حالا با توجه به تعریف فوق، مشتق مرتبه اول هر کدام از متغیرهای حالت را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم معادلات فضای حالت سیستم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= \dot{x}_2 = x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 &= \dot{x}_3 = \ddot{x}(t) = -2x_3-\sin(x_1)+0/5e^{-t}+3 \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2\\ x_3\\ -2x_3-\sin(x_1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0/5e^{-t}+3\end{bmatrix} \tag{2-1}$$

پاسخ د:

نکته: مفهوم تابع تبدیل در سیستم‌های خطی قابل تعریف است (یا حداقل سیستمی که حول نقطه کارکرد خودش خطی‌سازی شده باشد).

لذا **این سیستم، فاقد تابع تبدیل است.**

نکته: بایستی توجه کرد که تابع تبدیل بین ورودی و خروجی یک سیستم نوشته می‌شود و بایستی شرایط اولیه همگی برابر با صفر باشند.

از این دیدگاه نیز این سیستم، **فاقد تابع تبدیل است.**

پاسخ ه:

ماتریس ژاکوبین خطی‌سازی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$J(\vec{X}_{eq}) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right|_{\vec{X}_{eq}} \Rightarrow J(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{۳-۱}$$

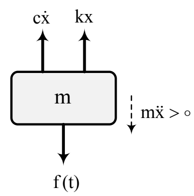
در نتیجه تابع تبدیل بین ورودی u و خروجی y عبارت است از:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1} \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

پاسخ سوال شماره دو

پاسخ الف:

سیستم ارتعاشاتی: ابتدا دیاگرام آزاد نیروهای وارده بر سیستم در شکل (۱-الف) را به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:



شکل ۲-۱. دیاگرام آزاد نیروهای وارده بر سیستم جرم-فنر-دمپر یک درجه آزادی تحت تحریک خارجی.

حال با توجه به شکل (۲-۱) و با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; -kx - c\dot{x} + f(t) = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{۲-۱}$$

و به این ترتیب، معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم جرم-فنر-دمپر به دست آمده است. توجه به این نکته ضروری می‌نماید که در استخراج معادله دیفرانسیل سیستم، فرض کرده‌ایم که همه اجزا، آن دارای رفتار خطی هستند.

سیستم سیالاتی: برای استخراج معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم سیالاتی شکل (۱-ب)، بایستی قانون پایستگی جرم را برای تک‌تک ظرف‌های سیال بنویسیم که عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}\left\{\text{حجم سیال درون ظرف}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{دبی سیال ورودی به}\\ \text{ظرف}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{دبی سیال خارج شده}\\ \text{از ظرف}\end{matrix}\right\}$$

لذا برای ظرف ۱ داریم:

$$\frac{d}{dt}\left[A_1 h_1(t)\right] = u(t) - \frac{h_1(t)}{R_1} \tag{۲-۲}$$

هم‌چنین برای ظرف دوم خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\left[A_2 h_2(t)\right] = \frac{h_1(t)}{R_1} - \frac{h_2(t)}{R_2} \tag{۲-۳}$$

در ادامه با فرض این‌که سطح مقطع ظروف ثابت باشد، از زیر علامت انتگرال خارج شده و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dh_1}{dt} = u(t) - \dfrac{h_1(t)}{R_1} \\ A_2 \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1(t)}{R_1} - \dfrac{h_2(t)}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{h}_1 = (\dfrac{-1}{R_1 A_1})h_1 + (\dfrac{1}{A_1})u(t) \\ \dot{h}_2 = (\dfrac{1}{R_1 A_2})h_1 + (\dfrac{-1}{R_2 A_2})h_2 \end{cases} \tag{۲-۴}$$

و به این ترتیب، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتفاع مخازن در سیستم سیالاتی به دست آمده است. مجدداً توجه به این نکته ضروری می‌نماید که در استخراج معادله دیفرانسیل این سیستم نیز، فرض کرده‌ایم که همه اجزاء آن دارای رفتار خطی هستند.

پاسخ ب:

سیستم ارتعاشاتی: غالباً برای سیستم‌های مکانیکی؛ مکان و سرعت، متغیرهای حالت هستند. زیرا با دانستن مقادیر مکان و سرعت جسم در هر لحظه، می‌توان وضعیت آن را به طور کامل برای همه زمان‌ها به دست آورد. لذا داریم:

$$\begin{matrix} x_1 \approx x(t);\;\; \text{Position} \\ x_2 \approx \dot{x}(t);\;\; \text{Velocity} \end{matrix} \Rightarrow \vec{X}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{۲-۵}$$

بردار حالت سیستم، $\vec{X}_{2\times1}$، به دست آمده است.

در ادامه معادلات فضای حالت سیستم عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x_1=\dot{x}_1=\dot{x}(t);\ \text{Velocity}\\&\frac{d}{dt}x_2=\dot{x}_2=\ddot{x}(t);\ \text{Acceleration}\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=(\frac{-k}{m})x_1+(\frac{-c}{m})x_2+(\frac{1}{m})f(t)\end{cases}\tag{۶-۲}$$

حالا اگر بخواهیم معادلات فضای حالت را به فرم ماتریسی $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=Cx+Du\end{cases}$ نمایش دهیم، برای سیستم جرم-فنر-دمپر خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\-k/m&-c/m\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1/m\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}_{1\times2}\tag{۷-۲}$$

سیستم سیالاتی: ارتفاع سیال در هر مخزن برای سیستم سیالاتی؛ یک متغیر حالت می‌باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}x_1\approx h_1(t)\\x_2\approx h_2(t)\end{aligned}\Rightarrow\ \vec{X}_{2\times1}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\tag{۸-۲}$$

بردار حالت این سیستم نیز، $\vec{X}_{2\times1}$، به دست آمده است.

در ادامه معادلات فضای حالت سیستم عبارتند از:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=(\frac{-1}{R_1A_1})x_1+(\frac{1}{A_1})u(t)\\\dot{x}_2=(\frac{1}{R_1A_2})x_1+(\frac{-1}{R_2A_2})x_2\end{cases}\tag{۹-۲}$$

ماتریس‌های A، B، C و D در فضای حالت سیستم سیالاتی عبارتند از:

$$A=\begin{bmatrix}-1/R_1A_1&0\\1/R_1A_2&-1/R_2A_2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1/A_1\\0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&1/R_2\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}_{1\times1}\tag{۱۰-۲}$$