Advanced Control Systems (I)

Solutions #2

School of Mechanical Engineering
Dynamics and Control
2017-2018

Prof. Ali Ghaffari

TA: Hamid Rahmanei

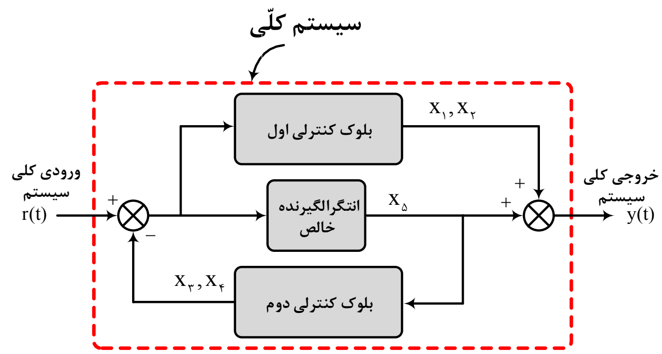
پاسخ‌های قسمت اول:

پاسخ سوال شماره یک

پاسخ الف:

> **نکته:** در دیاگرام جریانی و جعبه‌ای یک سیستم کنترلی خطی نامتغیر با زمان، پس از هر جمله دارای انتگرال‌گیرنده رسته یک ($\frac{a}{bs+c}$)، یک متغیر حالت تعریف می‌شود. بدیهی است که برای تابع تبدیل با یک انتگرال‌گیرنده رسته n، بایستی تعداد n تا متغیر حالت تعریف نمود.

به شکل (۱-۱) توجه کنید. بلوک‌های کنترلی اول و دوم هرکدام **رسته دو** بوده و لذا دارای **دو متغیر حالت** به ترتیب (x_1, x_2) و (x_3, x_4) هستند. هم‌چنین برای بلوک **انتگرال‌گیرنده** خالص نیز یک متغیر حالت (x_5) در نظر می‌گیریم. در نتیجه این سیستم مجموعاً دارای **پنج متغیر حالت** است.



شکل ۱-۱. دیاگرام جعبه‌ای سیستم کلی به همراه بلوک‌های کنترلی اول، دوم و انتگرال‌گیرنده خالص.

با توجه به شکل (۱-۱)، بدیهی است که سیگنال ورودی و خروجی برای سیستم کلی به ترتیب $r(t)$ و $y(t)$ هستند.

پاسخ ب:

ابتدا تابع تبدیل مربوط به بلوک کنترلی اول و دوم را به دست می‌آوریم. برای این منظور از رابطه زیر برای هر کدام از بلوک‌ها استفاده می‌شود:

$$G_i(s) = C_i(sI_{2\times 2} - A_i)^{-1}B_i + D_i, \quad i = 1, 2 \tag{1-1}$$

بلوک اول شکل (۱-۱):

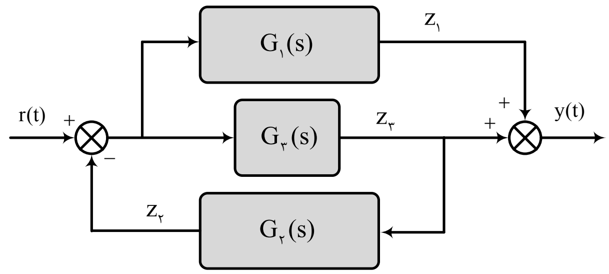
$$G_1(s) = C_1(sI_{2\times 2} - A_1)^{-1}B_1 + D_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.5 \right\} = \frac{2-4s}{(s+2)(s+4)} \tag{2-1}$$

بلوک دوم شکل (۱-۱):

$$G_2(s) = C_2(sI_{2\times 2} - A_2)^{-1}B_2 + D_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -5 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} + 0 \right\} = \frac{1.5}{s+1} \tag{3-1}$$

بلوک انتگرال‌گیر خالص: بدیهی است که تابع تبدیل آن $G_3(s)=1/s$ است.

حالا تلاش می‌کنیم تابع تبدیل کلی $G(s)$ را با توجه به شکل (۱-۲) به دست آوریم.



شکل ۱-۲. دیاگرام جعبه‌ای سیستم کلی با مشخص نمودن تابع تبدیل بلوک‌ها؛ $G_1(s)$، $G_2(s)$ و $G_3(s)$.

با توجه به قواعد مربوط به ترکیب توابع تبدیل (که در درس کنترل اتوماتیک با آن آشنا شده‌اید!)؛ برای شکل (۱-۲) روابط زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll} z_1=[R(s)-z_2]G_1 & (i) \\ z_2=G_2(s)z_3 & (ii) \\ z_3=[R(s)-z_2]G_3 & (iii) \\ Y(s)=z_1+z_3 & (iiii) \end{array} \Rightarrow Y(s)=(R(s)-z_2)G_1+(R(s)-z_2)G_3 \Rightarrow \boxed{Y(s)=[R(s)-z_2][G_1+G_3]} \qquad (۴-۱)$$

در ادامه در رابطه (۱-۴)؛ باید z_2 را بر حسب $R(s)$ پیدا کنیم. برای این منظور از ترکیب روابط (ii) و (iii) فوق داریم:

$$\begin{cases} z_2=G_2(s)z_3 \\ z_3=[R(s)-z_2]G_3 \end{cases} \Rightarrow z_2=G_2G_3[R(s)-z_2] \Rightarrow z_2=\frac{G_2G_3}{1+G_2G_3}R(s) \qquad (۵-۱)$$

و در نتیجه تابع تبدیل بین ورودی $R(s)$ و خروجی $Y(s)$ به دست می‌آید:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1+G_3}{1+G_2G_3}=\frac{\frac{2-4s}{(s+2)(s+4)}+\frac{1}{s}}{1+\frac{1/5}{s+1}\frac{1}{s}}=\frac{(s+1)(-3s^2+8s+8)}{(s+2)(s+4)(s^2+s+1/5)} \qquad (۶-۱)$$

پاسخ ج:

برای استخراج فضای حالت سیستم از روی دیاگرام جعبه‌ای، مجدداً به شکل (۱-۱) توجه کنید. با توجه به این شکل، روابط زیر را بین متغیرهای حالت، ورودی و خروجی سیستم می‌توان نوشت:

$$\text{Block \#1}:\begin{cases} \dot{x}_1=-2x_1+u_1 \\ \dot{x}_2=3x_1-4x_2 \\ y_1=-4x_1+6x_2+0/5u_1 \end{cases} \qquad \text{Block \#2}:\begin{cases} \dot{x}_1=-2x_1+u_1 \\ \dot{x}_2=3x_1-4x_2 \\ y_1=-4x_1+6x_2+0/5u_1 \end{cases} \qquad (۷-۱)$$

$$\text{Pure Integrator Block}:\ \dot{x}_5=r(t)-y_2, \qquad \text{Output}:y(t)=y_1+x_5$$

همچنین توجه داریم که از روی شکل (۱-۱)، روابط $u_1=r(t)-y_2=-3x_4+r(t)$ و $u_2=x_5$ نیز همواره برقرار هستند. لذا با جانشانی در رابطه (۱-۷)، نمایش فضای حالت معادلات دیفرانسیل سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_4 + r(t) \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \\ \dot{x}_4 = 5x_3 - x_4 + 0/5x_5 \\ \dot{x}_5 = -3x_4 + r(t) \end{cases} \qquad y(t) = -4x_1 + 6x_2 - 1/5x_4 + x_5 + 0/5r(t) \tag{۸-۱}$$

و ماتریس‌های سیستم در فرم $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ عبارتند از:

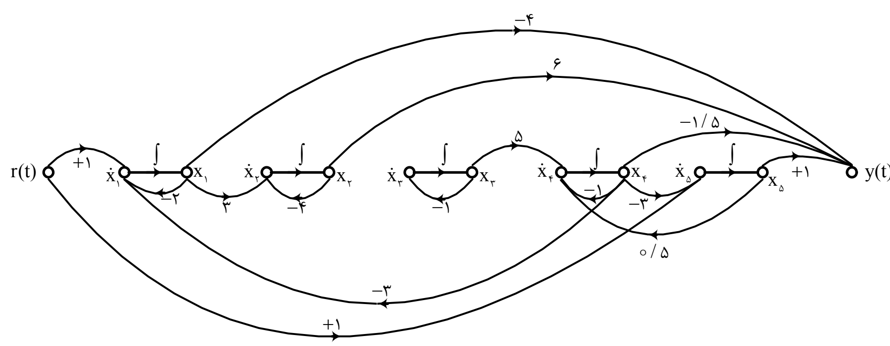
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [0/5]_{1\times 1} \tag{۹-۱}$$

پاسخ د:

دیاگرام جریانی سیستم دینامیکی خطی با معادلات فضای حالت (۱-۸) به صورت شکل (۱-۳) است.

قابل توجه است که رابطه بین x_i و $\dot{x}_i$ در دیاگرام جریانی یک سیستم، به وسیله یک خط مستقیم جهت‌دار نشان داده می‌شود.

هم‌چنین متغیرهای مرتبط را با یک خط منحنی (خط مستقیم نباشد!!) نمایش می‌دهند که وزن آن با یک عدد مثبت یا منفی بر روی منحنی مشخص می‌شود.



شکل ۱-۳. دیاگرام جریانی سیستم کلی با معادلات فضای حالت (۱-۸).

پاسخ ه:

چنان که در رابطه (۱-۶) ملاحظه می‌کنید، مخرج تابع تبدیل یک چندجمله‌ای از رسته ۴ است. از طرف دیگر، با توجه به رابطه (۱-۸) یا (۱-۹)، رسته معادلات فضای حالت برابر ۵ است.

در حالتی که سیستم می‌نیمال[1] باشد، بایستی رسته تابع تبدیل با رسته معادلات فضای حالت یکی باشد. ولی گاهی اوقات که یکی از ***zero*** های سیستم با یکی از ***pole*** های آن سیستم، از صورت و مخرج با هم ساده شده باشند، آنگاه رسته تابع تبدیل کاهش پیدا می‌کند[2]. عامل به وجود آمدن چنین شرایطی می‌تواند این باشد که تاثیر یکی از متغیرهای حالت سیستم در خروجی دیده نمی‌شود. به طور کلی در تکمیل توضیحات فوق می‌توان گفت؛ اصولاً هر قطب تابع تبدیل سیستم، یک مقدار ویژه فضای حالت است ولی عکس آن لزوماً همواره برقرار نیست. یعنی ممکن است بعضی از مقادیر ویژه فضای حالت سیستم به عنوان قطب در تابع تبدیل آن نباشد.

[1] minimal

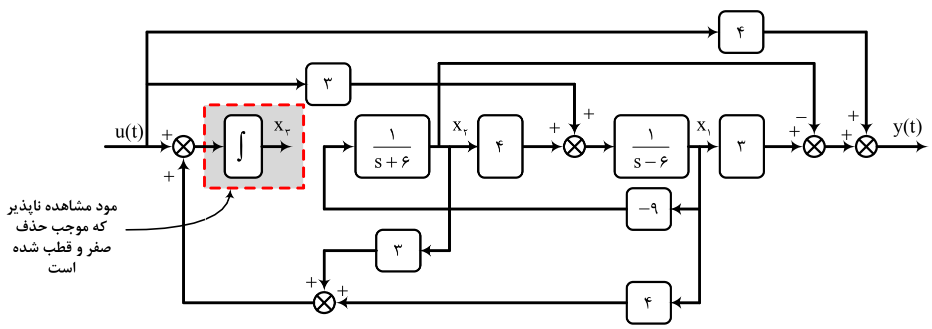
[2] به این حالت «حذف صفر و قطب» یا «*zero-pole cancellation*» گفته می‌شود که باعث کاهش رسته تابع تبدیل سیستم می‌شود.

پاسخ سوال شماره دو

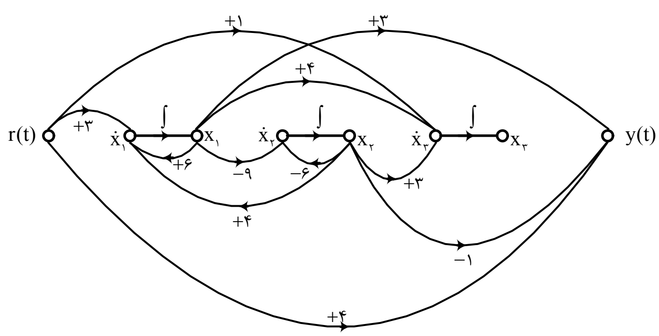
پاسخ الف:

دیاگرام جعبه‌ای و جریانی برای این سیستم دینامیکی رسته ۳، به ترتیب در شکل‌های (۲-۱) و (۲-۲) ترسیم شده است. در واقع با توجه به روابط دیفرانسیلی و جبری موجود بین متغیرهای حالت سیستم که توسط رابطه (۲-۱) داده شده است، به راحتی می‌توان دیاگرام جریانی و جریانی سیستم را ترسیم کرد.

$$\begin{cases} \dot{x}_۱ = ۶x_۱ + ۴x_۲ + ۳u(t) \\ \dot{x}_۲ = -۹x_۱ - ۶x_۲ \\ \dot{x}_۳ = ۴x_۱ + ۳x_۲ + u(t) \\ y = ۳x_۱ - x_۲ + ۴u(t) \end{cases} \tag{۲-۱}$$



شکل ۲-۱. دیاگرام جعبه‌ای سیستم دینامیکی رسته ۳ با معادلات فضای حالت (۲-۱).



شکل ۲-۲. دیاگرام جریانی سیستم دینامیکی رسته ۳ با معادلات فضای حالت (۲-۱).

پاسخ ب:

برای محاسبه تابع تبدیل $G(s)$ بین ورودی $U(s)$ و خروجی $Y(s)$، ابتدا فرض می‌شود که شرایط اولیه سیستم برابر با صفر باشد و سپس از رابطه (۲-۲)، تابع تبدیل به دست می‌آید:

$$G(s) = C(sI - A)^{-۱}B + D \tag{۲-۲}$$

توجه داریم که ابتدا بایستی ماتریس‌های A، B ، C و D را به دست آوریم. با توجه به رابطه (۲-۱) داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۶ & ۴ & ۰ \\ -۹ & -۶ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} ۴ \end{bmatrix} \tag{۳-۲}$$

و در نتیجه با کمک رابطه (۲-۲) داریم:

$$G(s)=\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۰\end{bmatrix}\left\{s\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۶ & ۴ & ۰\\ -۹ & -۶ & ۰\\ ۴ & ۳ & ۰\end{bmatrix}\right\}^{-۱}\begin{bmatrix}۳\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}+۴$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s(s+۶) & ۴s & ۰\\ -۹s & s(s-۶) & ۰\\ ۴s-۳ & ۳s-۲ & s^{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}}{s(s^{۲}-۳۶+۳۶)}+۴ \tag{۲-۴}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}۳s(s+۹) & s(۱۸-s) & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}}{s^{۳}}+۴=\frac{۹s(s+۹)}{s^{۳}}+۴=\frac{۴s^{۲}+۹s+۸۱}{s^{۲}}$$

با توجه به این که مطابق رابطه (۲-۴)؛ رسته تابع تبدیل $G(s)$ برابر دو شده است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس دینامیک سیستم، A ، دارای نقص رتبه[3] شده است (از نظر ریاضیاتی) و یا این که سیستم مشاهده‌ناپذیر[4] است (از نظر فیزیکی).

وجود نقص رتبه به این معنا است که سطرها (یا ستون‌های) ماتریس A وابسته خطی هستند که با توجه به رابطه (۲-۳) به وضوح می‌توان این موضوع را ملاحظه کرد. هم‌چنین توجه شود که کل درایه‌های ستون سوم ماتریس A برابر صفر شده‌اند و لذا حتماً کاهش رتبه خواهیم داشت.

مشاهده‌ناپذیری سیستم به این معنا است که اثر یکی از متغیرهای حالت سیستم (حداقل یک حالت، می‌تواند تعداد بیشتری حالت باشد)، در خروجی دیده نمی‌شود. از شکل (۲-۱) به وضوح دیده می‌شود که اثر متغیر حالت سوم ($x_۳$) در خروجی؛ چه به صورت مستقیم و چه به صورت غیر مستقیم، دیده نمی‌شود.

پاسخ ج:

با توجه به تابع تبدیل به دست آمده در رابطه (۲-۴) داریم:

$$\begin{aligned}G(s)&=\frac{۹s+۸۱}{s^{۲}}+۴\\ G(s)&=\frac{b_۱s+b_۰}{s^{۲}+a_۱s+a_۰}\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}a_۰=۰ & a_۱=۰\\ b_۰=۸۱ & b_۱=۹\end{cases} \tag{۲-۵}$$

حالا با توجه به روابط مربوط به فرم کانونیکال کنترل‌پذیر[5] و کانونیکال مشاهده‌پذیر[6] که در کلاس درس با آن‌ها آشنا شده‌اید، داریم:

فضای حالت در فرم کانونیکال کنترل‌پذیر:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & ۱\\ -a_۰ & -a_۱ & -a_۲ & \cdots & -a_{n-۱}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}b_۰ & b_۱ & b_۲ & \cdots & b_{n-۱}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+Du\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}۸۱ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+۴u\end{cases} \tag{۲-۶}$$

---
[3] rank deficiency
[4] unobservable
[5] canonical controllable form
[6] canonical observable form

فضای حالت در فرم کانونیکال مشاهده‌پذیر:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_{n-۱} & ۱ & ۰ & \cdots & ۰\\ \vdots & ۰ & ۱ & \cdots & ۰\\ -a_۲ & ۰ & ۰ & \ddots & \vdots\\ -a_۱ & \vdots & \vdots & \cdots & ۱\\ -a_۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{n-۱}\\ b_{n-۲}\\ b_{n-۳}\\ \vdots\\ b_۰\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+Du\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹\\ ۸۱\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+۴u\end{cases} \qquad (۷\text{-}۲)$$

پاسخ‌های قسمت دوم: (*MATLAB*)

پاسخ سوال اول:

محاسبه ضرایب مجهول a، b و c در تقریب سهموی آدامز-بشفورث:

در این روش، $f(x,t)=a(t-t_{n-۱})^۲+b(t-t_{n-۱})+c$ در نظر گرفته می‌شود.

همچنین فرض می‌کنیم $f(t_{n-۱})=f_{n-۱}$، $f(t_{n-۲})=f_{n-۲}$ و $f(t_{n-۳})=f_{n-۳}$ باشد. لذا با جانشانی این سه قید در رابطه $f(x,t)$ فوق، خواهیم داشت:

$$@t=t_{n-۱}\ \rightarrow\ f(t_{n-۱})=f_{n-۱}\ \Rightarrow\ f_{n-۱}=a(\underbrace{t_{n-۱}-t_{n-۱}}_{=۰})^۲+b(\underbrace{t_{n-۱}-t_{n-۱}}_{=۰})+c\ \Rightarrow\ \boxed{c=f_{n-۱}}$$

$$@t=t_{n-۲}\ \rightarrow\ f(t_{n-۲})=f_{n-۲}\ \Rightarrow\ f_{n-۲}=a(\underbrace{t_{n-۲}-t_{n-۱}}_{=-\Delta t})^۲+b(\underbrace{t_{n-۲}-t_{n-۱}}_{=-\Delta t})+c \qquad (۱-m)$$

$$@t=t_{n-۳}\ \rightarrow\ f(t_{n-۳})=f_{n-۳}\ \Rightarrow\ f_{n-۳}=a(\underbrace{t_{n-۳}-t_{n-۱}}_{=-۲\Delta t})^۲+b(\underbrace{t_{n-۳}-t_{n-۱}}_{=-۲\Delta t})+c$$

پس از محاسبه ضرایب مجهول a و b از رابطه $(۱-m)$ خواهیم داشت:

$$\begin{matrix}g_۱=f_{n-۲}-f_{n-۱}\\ g_۲=f_{n-۳}-f_{n-۱}\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=\dfrac{g_۲-۲g_۱}{۲(\Delta t)^۲}\\ b=\dfrac{g_۲-۴g_۱}{۲(\Delta t)}\end{cases} \qquad (۲-m)$$

محاسبه انتگرال $\int_{t_{n-۱}}^{t_n} f(x,t)\,dt$:

حالا از طرفین رابطه $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=f(x,t)$، در بازه زمانی $t\in[t_{n-۱},t_n]$، انتگرال می‌گیریم و با جانشانی $f(x,t)$ از رابطه $f(x,t)=a(t-t_{n-۱})^۲+b(t-t_{n-۱})+c$ خواهیم داشت:

$$\int_{x(t_{n-۱})}^{x(t_n)}dx=\int_{t_{n-۱}}^{t_n}f(x,t)\,dt\ \Rightarrow\ x(t)\Big|_{t_{n-۱}}^{t_n}=\int_{t_{n-۱}}^{t_n}\left[a\left(t-t_{n-۱}\right)^۲+b\left(t-t_{n-۱}\right)+c\right]dt\ \Rightarrow$$

$$x(t_n)-x(t_{n-۱})=\left\{\frac{a\left(t-t_{n-۱}\right)^۳}{۳}\Bigg|_{t_{n-۱}}^{t_n}+\frac{b\left(t-t_{n-۱}\right)^۲}{۲}\Bigg|_{t_{n-۱}}^{t_n}+c(t)\Big|_{t_{n-۱}}^{t_n}\right\}$$

که پس از ساده‌سازی رابطه فوق خواهیم داشت:

$$x(t_n)=x(t_{n-۱})+\Delta t\{\frac{a(\Delta t)^۲}{۳}+\frac{b(\Delta t)}{۲}+c\} \tag{۳-m}$$

رابطه حل عددی آدامز-بشفورث:

حالا با جانشانی ضرایب مجهول a، b و c از رابطه ($۲-m$) در رابطه ($۳-m$) و ساده‌سازی کردن این رابطه داریم:

$$x(t_n)=x(t_{n-۱})+\frac{\Delta t}{۱۲}\{۲۳\,f(t_{n-۱})-۱۶\,f(t_{n-۲})+۵\,f(t_{n-۳})\} \tag{۴-m}$$

و یا:

$$x[n]=x[n-۱]+\frac{\Delta t}{۱۲}\{۲۳\,f_{n-۱}-۱۶\,f_{n-۲}+۵\,f_{n-۳}\} \tag{۵-m}$$

پاسخ سوال دوم:

کد *MATLAB*:

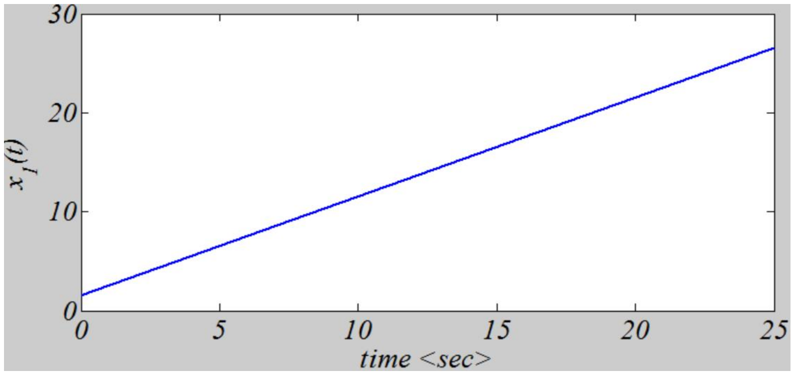
کد نوشته شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** در جدول (۲-۱) دیده می‌شود.

جدول ۲-۱. کد نوشته شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای حل عددی معادله فضای حالت سوال شماره ۲ و شبیه‌سازی پاسخ سیستم (روش: آدامز-بشفورث).

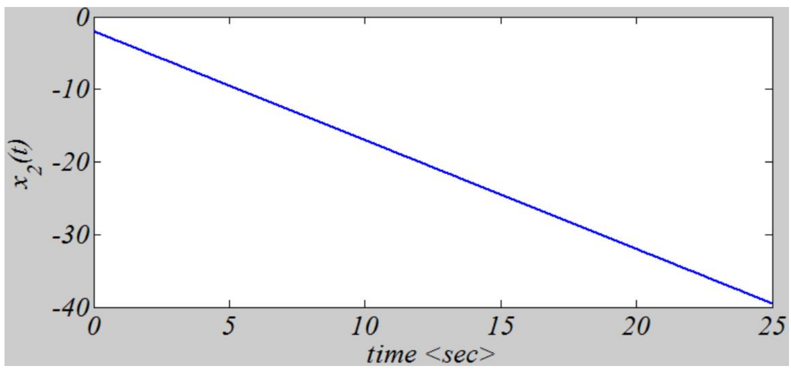
```
%%%%%%%%% ADAMS-BASHFORTH NUMERICAL INTEGRATION METHOD %%%%%%%%%%%%
clear all;
close all;
clc;
%%%%%%%%%%% TIME DOMAIN DISCRETIZATION
t0 = 0;
tf = 25;
dt = 0.01;
t = t0:dt:tf;          %%%%%%%% TIME VECTOR t_(1*n)
%%%%%%%%%%%%%% PARAMETER DEFINITIONS (u=0)
A_11 = 6; A_12 = 4; A_13 = 0;
A_21 = -9; A_22 = -6; A_23 = 0;
A_31 = 4; A_32 = 3; A_33 = 0;
A = [A_11 A_12 A_13; A_21 A_22 A_23; A_31 A_32 A_33];

C_11 = 3; C_12 = -1; C_13 = 0; D_11 = 4;
C= [C_11 C_12 C_13];
%%%%%%%%%%%%% INITIAL VALUE DEFINITIONS
X(1,1) = 1.5; X(2,1) = -2; X(3,1) = 0;           Y(1,1) = C*X(:,1);
X(:,2) = X(:,1)+(dt/12)*A*(23*X(:,1));           Y(1,2) = C*X(:,2);
X(:,3) = X(:,2)+(dt/12)*A*(23*X(:,2)-16*X(:,1)); Y(1,3) = C*X(:,3);
%%%%%%%%%%% ADAMS-BASHFORTH NUMERICAL INTEGRATION IMPLEMENTATION
for i = 4:length(t)
    X(:,i) = X(:,i-1)+(dt/12)*A*(23*X(:,i-1)-16*X(:,i-2)+5*X(:,i-3));
    Y(1,i) = C*X(:,i);
end
figure (1)
plot (t,X(1,:))
xlabel ('time <sec>')
ylabel ('x_1(t)')
figure (2)
plot (t,X(2,:))
xlabel ('time <sec>')
ylabel ('x_2(t)')
figure (3)
plot (t,X(3,:))
xlabel ('time <sec>')
ylabel ('x_3(t)')
figure (4)
plot (t,Y(1,:))
xlabel ('time <sec>')
ylabel ('y(t)')
```

ترسیم پاسخ متغیرهای حالت و خروجی:

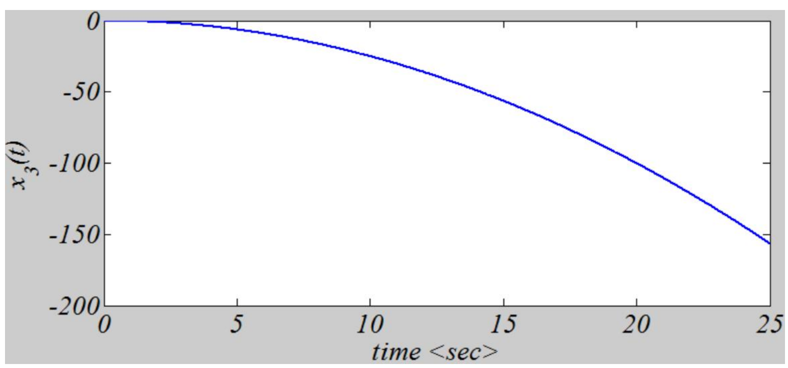
پاسخ متغیرهای حالت اول، دوم و سوم به همراه خروجی به ترتیب در شکل‌های (۲-۳)، (۲-۴)، (۲-۵) و (۲-۶) دیده می‌شوند.



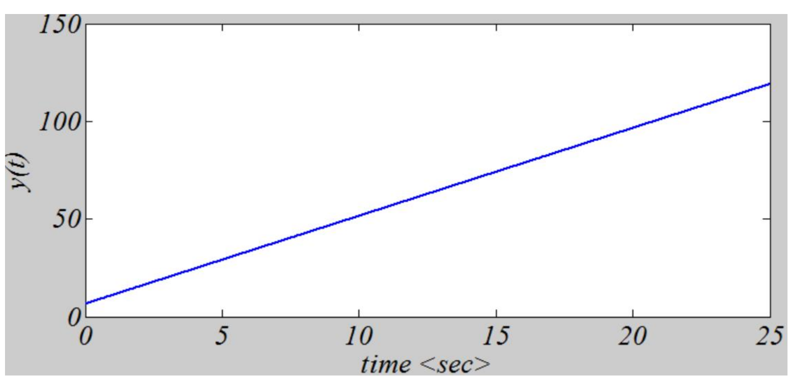
شکل ۲-۳. پاسخ متغیر حالت اول، x_1 ، بر حسب زمان در بازه ۲۵ ثانیه‌ای با ورودی صفر.



شکل ۲-۴. پاسخ متغیر حالت دوم، x_2 ، بر حسب زمان در بازه ۲۵ ثانیه‌ای با ورودی صفر.



شکل ۲-۵. پاسخ متغیر حالت سوم، x_3 ، بر حسب زمان در بازه ۲۵ ثانیه‌ای با ورودی صفر.



شکل ۲-۶. پاسخ خروجی سیستم، $y(t)$ ، بر حسب زمان در بازه ۲۵ ثانیه‌ای با ورودی صفر.