پاسخ‌های قسمت اول:

پاسخ سوال شماره یک

پاسخ الف:

معکوس تبدیل لاپلاس:

ماتریس A برابر است با: $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$. می‌دانیم که ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$ از رابطه $\Phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ به دست می‌آید. لذا داریم:

$$\Phi(t)=L^{-1}\left\{\left(s\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix}s&-1\\0&s\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}s&1\\0&s\end{bmatrix}}{s^2}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s^2}\\0&\frac{1}{s}\end{bmatrix}\right\} \quad (۱-۱)$$

توجه شود که در رابطه (۱-۱)، معکوس ماتریس $(sI-A)$ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$(sI-A)^{-1}=\frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)}=\frac{\begin{bmatrix}s&+1\\0&s\end{bmatrix}}{s\times s-0\times -1}=\frac{\begin{bmatrix}s&+1\\0&s\end{bmatrix}}{s^2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s^2}\\0&\frac{1}{s}\end{bmatrix} \quad (۲-۱)$$

در ادامه بایستی از تک‌تک درایه‌های ماتریس $(sI-A)^{-1}$ در رابطه (۱-۱)، تبدیل معکوس لاپلاس بگیریم و خواهیم داشت:

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}&L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\\0&L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix} \quad (۳-۱)$$

قطری‌سازی کردن:

در روش قطری‌سازی کردن، ابتدا باید مقادیر ویژه (λ_i ها) و سپس بردارهای ویژه متناظر با آن، ($X^{(i)}$ ها) را محاسبه کنیم. آن‌گاه باید ماتریس تبدیل همانندی یا تبدیل مودال ($T=[X^{(1)}\quad X^{(2)}\quad\ldots\quad X^{(n)}]$) را تشکیل دهیم و سپس با توجه به رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$، ماتریس قطری‌شده را محاسبه کنیم. در نهایت از رابطه $e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}$، ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$ به دست می‌آید:

مقادیر ویژه:

$$\det\{\lambda I-A\}=\det\left\{\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2=0\ \Longrightarrow\ \lambda_{1,2}=\{0,0\} \quad (۴-۱)$$

بردارهای ویژه:

توجه داریم که با توجه به تکراری بودن مقدار ویژه حقیقی سیستم؛ $\lambda_1=\lambda_2=0$ ابتدا باید ببینیم که این مقدار ویژه دارای چند تا بردار ویژه ناوابسته (یا مستقل) است. برای این منظور ابتدا رتبه فضای پوچی ماتریس $[\lambda_i I-A]=[\bar{0}-A]$ را به دست می‌آوریم:

$$rank\{\bar{0}-A\}=rank\left\{\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}\right\}\ \rightarrow\ m=rank\{\bar{0}-A\}=1 \quad (۵-۱)$$

لذا دارای $(n-m=2-1=1)$ بردار ویژه مستقل خطی است و همچنین دارای یک بردار ویژه تعمیم‌یافته ξ^{11} است.

برای محاسبه بردار ویژه مستقل $X^{(1)}$ متناظر با مقدار ویژه $i=1$ ام سیستم داریم:

$$[\lambda_i I - A][X^{(i)}] = [\bar{O}] \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; -X_2^1 = 0 \;\rightarrow\; X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۱-۶}$$

و برای محاسبه بردار ویژه تعمیم‌یافته ξ^{11} داریم:

$$[\lambda_i I - A][\xi^{11}] = -X^{(1)} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^{11} \\ \xi_2^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \xi_2^{11} = 1 \;\rightarrow\; \xi^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۱-۷}$$

تبدیل مودال:

حالا ماتریس تبدیل مودال T را تشکیل می‌دهیم:

$$T = [X^{(1)} \quad \xi^{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱-۸}$$

لذا معکوس تبدیل همانندی برابر است با: $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

محاسبه ماتریس انتقال حالت قطری:

سپس ماتریس شبه-قطری‌شده Λ را به دست می‌آوریم:

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۱-۹}$$

و لذا ماتریس انتقال حالت قطری ($\Phi^\star(t) = e^{\Lambda t}$) عبارت است از:

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} = \left\{ I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\Lambda^k t^k}{k!} + \cdots \right\} = \{I + \Lambda t + 0 + 0 + \cdots + 0\} = I + \Lambda t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱-۱۰}$$

و در نهایت از رابطه $e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$ داریم:

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱-۱۱}$$

با مقایسه دو رابطه (۱-۳) و (۱-۱۱)، ملاحظه می‌شود که هر دو پاسخ برای ماتریس انتقال حالت از هر دو روش معکوس تبدیل لاپلاس و قطری‌سازی کردن یکسان است.

پاسخ $x(t)$ به ازاء شرایط اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$:

حالا که ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$ را به دست آورده‌ایم، پاسخ $x(t)$ برابر است با:

$$x(t) = \Phi(t) x_0 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ -1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ -1 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1(t) = 1-t \\ x_2(t) = -1 \end{cases} \tag{۱-۱۲}$$

مودهای رفتاری سیستم:

برای یک سیستم دینامیکی با ماتریس حالت A که دارای مقادیر ویژه متمایز باشد، مودهای رفتاری سیستم عبارتند از: $modes\!:\{e^{\lambda_i t}\}$. اما برای حالتی که ماتریس A دارای مقدار ویژه تکراری λ_i (k تا) باشد، مودهای آن عبارتند از: $modes\!:\left\{e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t}, \ldots, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_i t}\right\}$.

و در حالت سوم؛ اگر ماتریس A سیستم دارای مقادیر ویژه مختلط مزدوج به صورت $\lambda_j = \sigma_1 \pm j\omega_1$ باشد، مودهای رفتاری سیستم عبارتند از: $modes\!:\{e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t), e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t)\}$.

برای ماتریس حالت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، چون دو قطب حقیقی تکراری $\lambda = 0$ با تعدد ۲ دارد، مودهای رفتاری عبارتند از:

$$modes\!:\{e^{0t}, te^{0t}\} = \{1, t\} \tag{۱-۱۳}$$

یعنی در پاسخ $x_1(t) = 1 - t$ و $x_2(t) = -1$ در رابطه (۱-۱۲)، مقدار زمانی پاسخ‌ها به صورت ترکیب خطی از مودهای رفتاری سیستم شده است.

پاسخ ب:

معکوس تبدیل لاپلاس:

ماتریس A برابر است با: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$. می‌دانیم که ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$ از رابطه $\Phi(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ به دست می‌آید. لذا داریم:

$$\Phi(t) = L^{-1}\left\{\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} s+5 & +1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+5)}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}\right\} \quad (۱۴\text{-}۱)$$

در ادامه بایستی از تک‌تک درایه‌های ماتریس $(sI - A)^{-1}$ در رابطه (۱-۱۴)، تبدیل معکوس لاپلاس بگیریم و خواهیم داشت:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} & L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+5)}\right\} \\ 0 & L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & L^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5}\right)\right\} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{e^{-t}-e^{-5t}}{4} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (۱۵\text{-}۱)$$

حل مستقیم:

برای حل مستقیم ماتریس انتقال حالت، بایستی بسط تیلور آن را به صورت رابطه زیر بنویسیم:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = \left\{I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots + A^k\frac{t^k}{k!} + \cdots\right\} \quad (۱۶\text{-}۱)$$

حالا بایستی توان‌های مختلف ماتریس A را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} A^1 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\ A^2 &= AA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & -6 \\ 0 & (-5)^2 \end{bmatrix} \\ A^3 &= A^2A = \begin{bmatrix} (-1)^2 & -6 \\ 0 & (-5)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^3 & 31 \\ 0 & (-5)^3 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A^k &= \begin{bmatrix} (-1)^k & f((-1)^k, (-5)^k) \\ 0 & (-5)^k \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (۱۷\text{-}۱)$$

و لذا داریم:

$$\Phi(t) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} (-1)^2 & -6 \\ 0 & (-5)^2 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2!} + \cdots + \begin{bmatrix} (-1)^k & f\left((-1)^k, (-5)^k\right) \\ 0 & (-5)^k \end{bmatrix}\frac{t^k}{k!} + \cdots\right\} \quad (۱۸\text{-}۱)$$

در نهایت با ساده‌سازی عبارت (۱-۱۸) خواهیم داشت:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \left\{1 + (-t)^1 + \frac{(-t)^2}{2!} + \cdots\right\} & \frac{1}{4}\left\{\left\{1 + (-t)^1 + \frac{(-t)^2}{2!} + \cdots\right\} - \left\{1 + (-5t)^1 + \frac{(-5t)^2}{2!} + \cdots\right\}\right\} \\ 0 & \left\{1 + (-5t)^1 + \frac{(-5t)^2}{2!} + \cdots\right\} \end{bmatrix} \quad (۱۹\text{-}۱)$$

و با توجه به سری‌های تیلور $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!} = e^{-t}$ و $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5t)^k}{k!} = e^{-5t}$ داریم:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!} & \frac{\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5t)^k}{k!}\right\}}{4} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{e^{-t}-e^{-5t}}{4} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (۲۰\text{-}۱)$$

با مقایسه دو رابطه (۱-۱۵) و (۱-۲۰)، ملاحظه می‌شود که هر دو پاسخ برای ماتریس انتقال حالت از روش معکوس تبدیل لاپلاس و روش مستقیم یکسان است.

پاسخ $x(t)$ به ازاء شرایط اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -3 \end{bmatrix}$:

حالا که ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$ را به دست آورده‌ایم، پاسخ $x(t)$ برابر است با:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{e^{-t}-e^{-5t}}{4} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{e^{-t}}{2} - \frac{3}{4}(e^{-t} - e^{-5t}) \\ -3e^{-5t} \end{bmatrix} \implies x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.25e^{-t} + 0.75e^{-5t} \\ -3e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (۱-۲۱)$$

مودهای رفتاری سیستم:

برای ماتریس حالت $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$، چون دو قطب حقیقی متمایز دارد، مودهای رفتاری عبارتند از:

$$modes: \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\} = \{e^{-t}, e^{-5t}\} \quad (۱-۲۲)$$

پاسخ ج:

قطری‌سازی کردن:

مقادیر ویژه:

$$\det\{\lambda I - A\} = \det\left\{\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -8 \\ 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \{-3, -3\} \quad (۱-۲۳)$$

بردارهای ویژه:

توجه داریم که با توجه به تکراری بودن مقدار ویژه حقیقی سیستم؛ $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$، ابتدا باید ببینیم که این مقدار ویژه دارای چند تا بردار ویژه ناوابسته (یا مستقل) است. برای این منظور ابتدا رتبه فضای پوچی ماتریس $[\lambda_i I - A] = [-3I - A]$ را به دست می‌آوریم:

$$rank\{-3I - A\} = rank\left\{\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \rightarrow m = 1 \quad (۱-۲۴)$$

لذا دارای $(n - m = 2 - 1 = 1)$ بردار ویژه مستقل خطی است و همچنین دارای یک بردار ویژه تعمیم‌یافته ξ^{11} است.

برای محاسبه بردار ویژه مستقل $X^{(1)}$ متناظر با مقدار ویژه $i = 1$ ام سیستم داریم:

$$[\lambda_i I - A][X^{(i)}] = [\bar{O}] \implies \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies -8X_2^1 = 0 \rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱-۲۵)$$

و برای محاسبه بردار ویژه تعمیم‌یافته ξ^{11} داریم:

$$[\lambda_i I - A][\xi^{11}] = -X^{(1)} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1^{11} \\ \xi_2^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies -8\xi_2^{11} = -1 \rightarrow \xi^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (۱-۲۶)$$

تبدیل مودال:

حالا ماتریس تبدیل مودال T را تشکیل می‌دهیم:

$$T = [X^{(1)} \quad \xi^{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (۱-۲۷)$$

لذا معکوس تبدیل همانندی برابر است با: $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

محاسبه ماتریس انتقال حالت قطری:

سپس ماتریس شبه-قطری‌شده Λ را به دست می‌آوریم:

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 8\\0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{8}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 1\\0 & -3\end{bmatrix} \qquad (۲۸-۱)$$

و لذا ماتریس انتقال حالت قطری ($\Phi^\star(t) = e^{\Lambda t}$) عبارت است از:

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\Lambda t)^k}{k!} = \left\{I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\Lambda^k t^k}{k!} + \cdots\right\} = \begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!} & t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!}\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-3t} & te^{-3t}\\0 & e^{-3t}\end{bmatrix} \qquad (۲۹-۱)$$

و در نهایت از رابطه $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$ داریم:

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-3t} & te^{-3t}\\0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-3t} & 8te^{-3t}\\0 & e^{-3t}\end{bmatrix} \qquad (۳۰-۱)$$

حل مستقیم:

برای حل مستقیم ماتریس انتقال حالت، بایستی بسط تیلور آن را به صورت رابطه زیر بنویسیم:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = \left\{I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots + A^k\frac{t^k}{k!} + \cdots\right\} \qquad (۳۱-۱)$$

حالا بایستی توان‌های مختلف ماتریس A را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}
A^1 &= \begin{bmatrix}-3 & 8\\0 & -3\end{bmatrix}\\
A^2 = AA &= \begin{bmatrix}-3 & 8\\0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 8\\0 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-3)^2 & 2(8\times -3)\\0 & (-3)^2\end{bmatrix}\\
A^3 = A^2A &= \begin{bmatrix}(-3)^2 & 2(8\times -3)\\0 & (-3)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 8\\0 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-3)^3 & 3(8\times (-3)^2)\\0 & (-3)^3\end{bmatrix}\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
A^k &= \begin{bmatrix}(-3)^k & k(8\times (-3)^{k-1})\\0 & (-3)^k\end{bmatrix}\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned} \qquad (۳۲-۱)$$

و لذا داریم:

$$\Phi(t) = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3 & 8\\0 & -3\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}(-3)^2 & 2(8\times -3)\\0 & (-3)^2\end{bmatrix}\frac{t^2}{2!} + \cdots + \begin{bmatrix}(-3)^k & k(8\times (-3)^{k-1})\\0 & (-3)^k\end{bmatrix}\frac{t^k}{k!} + \cdots\right\} \qquad (۳۳-۱)$$

در نهایت با ساده‌سازی عبارت (۱-۳۳) خواهیم داشت:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}\left\{1 + (-3t)^1 + \frac{(-3t)^2}{2!} + \cdots\right\} & \left\{0 + 8t + 8\times -3t^2 + \cdots + 8\times\frac{(-3)^{k-1}t^k}{(k-1)!} + \cdots\right\}\\ 0 & \left\{1 + (-3t)^1 + \frac{(-3t)^2}{2!} + \cdots\right\}\end{bmatrix} \qquad (۳۴-۱)$$

و با توجه به سری تیلور $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!} = e^{-3t}$ داریم:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!} & 8t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!}\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-3t} & 8te^{-3t}\\0 & e^{-3t}\end{bmatrix} \qquad (۳۵-۱)$$

با مقایسه دو رابطه (۱-۳۰) و (۱-۳۵)، ملاحظه می‌شود که هر دو پاسخ برای ماتریس انتقال حالت از روش قطری‌سازی کردن و روش مستقیم یکسان است.

پاسخ $x(t)$ به ازاء شرایط اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$:

حالا که ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$ را به دست آورده‌ایم، پاسخ $x(t)$ برابر است با:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 8te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-3t} + 24te^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1+12t)e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} \qquad (۱-۳۶)$$

مودهای رفتاری سیستم:

برای ماتریس حالت $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$، چون دو قطب حقیقی تکراری دارد، مودهای رفتاری عبارتند از:

$$modes: \{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}\} = \{e^{-3t}, te^{-3t}\} \qquad (۱-۳۷)$$

پاسخ د:

ماتریس انتقال حالت این سیستم دینامیکی را قبلاً در رابطه (۱-۱۵) یا (۱-۲۰) به دست آورده‌ایم و داریم: $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{e^{-t}-e^{-5t}}{4} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$. لذا

در ادامه برای پیدا کردن پاسخ $y(t)$، به سادگی می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C\left\{\Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\right\} + Du(t) \qquad (۱-۳۸)$$

و لذا داریم:

$$y(t) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{e^{-t}-e^{-5t}}{4} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.5 \\ -3 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{e^{-(t-\tau)}-e^{-5(t-\tau)}}{4} \\ 0 & e^{-5(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} d\tau\right\} + 0.5\right] \qquad (۱-۳۹)$$

که پس از ساده‌سازی کردن رابطه فوق داریم:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} \frac{-5e^{-t}+3e^{-5t}}{4} \\ -3e^{-5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6-5e^{-t}-e^{-5t}}{10} \\ \frac{4}{10}(-1+e^{-5t}) \end{bmatrix}\right\} + 0.5 \Rightarrow y(t) = -0.5 - 1.75e^{-t} - 8.95e^{-5t} \qquad (۱-۴۰)$$

پاسخ سوال شماره دو

پاسخ الف:

تابع تبدیل بین ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ عبارت است از: $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+2}+\frac{s+3}{(s+1)^2+4}$.

ابتدا توجه داریم که می‌توان معادلات فضای حالت این سیستم کنترلی را به دو بلوک مجزا به صورت زیر تبدیل نمود:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}-2 & 0 & 0\\ \hline 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \hline x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ \hline b_2\\ b_3\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\left[\begin{array}{c|cc}1 & c_2 & c_3\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \hline x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{۱-۲}$$

در ادامه توجه داریم که $b_1\neq 0$. زیرا اگر $b_1=0$ باشد، آن‌گاه رابطه بین ورودی $u(t)$ و متغیر حالت $x_1(t)$ کاملاً از بین می‌رود و آن‌گاه مود رفتاری e^{-2t} مربوط به فرکانس $s=-2$ در تابع تبدیل بین ورودی و خروجی دیده نخواهد شد، در حالی که در تابع تبدیل $G(s)$ داده شده، این مود دیده می‌شود. هم‌چنین با توجه به وجود جمله $\frac{1}{s+2}$ در تابع تبدیل $G(s)$، ملاحظه می‌شود که $b_1=1$ است.

در ادامه می‌توان یک زیرسیستم از سیستم اصلی را به صورت فضای حالت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_2\\ b_3\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}c_2 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{۲-۲}$$

که رابطه بین ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ برابر است با: $G(s)=\frac{s+3}{(s+1)^2+4}$. لذا با کمک رابطه $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$، ضرایب مجهول b_2، b_3، c_2 و c_3 را محاسبه خواهیم نمود:

$$G(s)=\begin{bmatrix}c_2 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & -2\\ 2 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_2\\ b_3\end{bmatrix}=\frac{s+3}{(s+1)^2+4}\ \Rightarrow\ \frac{(b_2c_2+b_3c_3)s+\big(b_2(c_2-2c_3)+b_3(c_3+2c_2)\big)}{(s+1)^2+4}=\frac{s+3}{(s+1)^2+4} \tag{۳-۲}$$

که با متحد قرار دادن طرفین رابطه (۲-۳) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}b_2c_2+b_3c_3=1\\ b_2(c_2-2c_3)+b_3(c_3+2c_2)=3\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}b_2\\ b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{۴-۲}$$

قابل توجه است که انتخاب فوق برای ضرایب مجهول b_i و c_i **یکتا نیست.**

(دانشجویان محترم می‌توانند با توجه به ضرایب b_i و c_i محاسبه شده، صحت رابطه $G(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{s+3}{(s+1)^2+4}=C(sI-A)^{-1}B$ را بررسی کنند)

پاسخ ب:

می‌دانیم پاسخ کلی سیستم $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$ برابر است با:

$$y(t)=C\left\{\Phi(t)x_0+\int_0^t\Phi(t-\xi)Bu(\xi)d\xi\right\}+Du(t) \tag{۵-۲}$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر، پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ای واحد عبارت است از: ($D=0$)

$$y(t)=C\Phi(t)\int_0^t\Phi(-\xi)Bu(\xi)d\xi=C\Phi(t)\left(\int_0^t\Phi(-\xi)\delta(\xi-0)d\xi\right)B \tag{۶-۲}$$

توجه شود که، چون ورودی $\delta(\xi-0)$ ضربه‌ای است که در زمان $t=0$ اتفاق می‌افتد، لذا پاسخ انتگرال فوق چنین خواهد شد:

$$\int_0^t \Phi(-\xi)\delta(\xi-0)d\xi=\Phi(0)=I_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{۷-۲}$$

و در نتیجه داریم:

$$y(t)=C\Phi(t)B \tag{۸-۲}$$

همان‌طور که از رابطه (۲-۸) ملاحظه می‌کنید، برای محاسبه پاسخ خروجی $y(t)$، نیاز داریم که ماتریس اتقال حالت را بیابیم. لذا در ادامه به محاسبه ماتریس انتقال حالت می‌پردازیم:

$$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2}&\bar{0}_{1\times 2}\\ \bar{0}_{2\times 1}&\begin{bmatrix}s+1&-2\\2&s+1\end{bmatrix}^{-1}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}e^{-2t}&\bar{0}_{1\times 2}\\ \bar{0}_{2\times 1}&L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s+1&-2\\2&s+1\end{bmatrix}^{-1}\right\}\end{bmatrix} \tag{۹-۲}$$

در ادامه تبدیل معکوس ماتریس بلوکی $\begin{bmatrix}s+1&-2\\2&s+1\end{bmatrix}^{-1}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s+1&-2\\2&s+1\end{bmatrix}^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}s+1&2\\-2&s+1\end{bmatrix}}{(s+1)^2+4}\right\}=\begin{bmatrix}L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}&L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}\\L^{-1}\left\{\frac{-2}{(s+1)^2+4}\right\}&L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}\end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix}\cos(2t)&\sin(2t)\\-\sin(2t)&\cos(2t)\end{bmatrix} \tag{۱۰-۲}$$

و لذا ماتریس انتقال حالت سیستم برابر است با:

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^{-t}\cos(2t)&e^{-t}\sin(2t)\\0&-e^{-t}\sin(2t)&e^{-t}\cos(2t)\end{bmatrix} \tag{۱۱-۲}$$

و لذا پاسخ $y(t)$ در رابطه (۲-۸) عبارت است از:

$$y(t)=C\Phi(t)B=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^{-t}\cos(2t)&e^{-t}\sin(2t)\\0&-e^{-t}\sin(2t)&e^{-t}\cos(2t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=e^{-2t}+e^{-t}(\cos(2t)+\sin(2t)) \tag{۱۲-۲}$$

پاسخ ج:

می‌دانیم پاسخ کلی سیستم $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=Cx+Du\end{cases}$ برابر است با:

$$y(t)=C\left\{\Phi(t)x_0+\int_0^t\Phi(t-\xi)Bu(\xi)d\xi\right\}+Du(t) \tag{۱۳-۲}$$

با توجه به $D=0$، داریم:

$$y(t)=C\left\{\Phi(t)x_0+\int_0^t\Phi(t-\xi)Bu(\xi)d\xi\right\} \tag{۱۴-۲}$$

پاسخ سیستم بدون ورودی:

با توجه به رابطه (۲-۱۴) داریم:

$$y_{zi}(t)=C\Phi(t)x_0 \tag{۱۵-۲}$$

پاسخ سیستم بدون شرایط اولیه:

با توجه به رابطه (۲-۱۴) داریم:

$$y_{zs}(t)=C\left\{\Phi(t)\left(\int_0^t\Phi(\xi)\delta(\xi)d\xi\right)B\right\}=C\Phi(t)\Phi(0)B=C\Phi(t)B \tag{۱۶-۲}$$

حالا برای این‌که شرط $y_{zi}(t) = y_{zs}(t)$ برقرار باشد، با توجه به روابط (۲-۱۵) و (۲-۱۶) باید داشته باشیم:

$$y_{zi}(t) = y_{zs}(t) \implies C\Phi(t)x_0 = C\Phi(t)B \implies x_0 = B \tag{۲-۱۷}$$

یعنی کافی است که شرایط اولیه سیستم؛ x_0 دقیقاً بر روی درایه‌های ماتریس B واقع شود. لذا شرایط اولیه مطلوب در این حالت برابر است با:

$$x_0 = B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ د:

پاسخ $y(t)$ سیستم را در قسمت **ب** محاسبه کرده‌ایم و داریم:

$$y(t) = e^{-2t} + e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t)) \tag{۲-۱۸}$$

برای محاسبه مقدار نهایی آن، باید حد بی‌نهایت $y(t)$ موجود باشد. لذا مقدار نهایی پاسخ $y(t)$ عبارت است از:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\{e^{-2t} + e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t))\} = 0 \tag{۲-۱۹}$$

پاسخ ه:

بله با توجه به مکان قطب‌های سیستم که در $p = \{-2, -1 \pm 2j\}$ قرار گرفته‌اند، لذا می‌توانیم از قضیه مقدار نهایی استفاده کنیم:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\left\{\frac{1}{s+2} + \frac{s+3}{(s+1)^2+4}\right\} = 0 \tag{۲-۲۰}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، هر دو پاسخ به دست آمده در روابط (۲-۱۹) و (۲-۲۰) یکسان هستند.

پاسخ‌های قسمت دوم: ($MATLAB$)

پاسخ سوال اول:

پاسخ الف:

به کمک دستور $expm(.)$ «، به راحتی می‌توانیم عبارت‌های ماتریسی نمایی خواسته‌شده را محاسبه کنیم.

جدول ۲-۱-۱. کد نوشته شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای محاسبه عبارت‌های نمایی ماتریسی.

```
clear all;
close all;
clc;
%%%%%%%%%% MATRIX DEFINITIONS
A_1 = [0 1; 0 0];
A_2 = [-1 1; 0 -5];
A_3 = [-3 8; 0 -3];
B_1 = expm(A_1)
B_2 = expm(A_2)
B_3 = expm(A_3)
C_1 = expm(2*A_1)
C_2 = expm(2*A_2)
C_3 = expm(2*A_3)
D_1 = expm(inv(A_1))
D_2 = expm(inv(A_2))
D_3 = expm(inv(A_3))
E_1 = inv(expm(A_1))
E_2 = inv(expm(A_2))
E_3 = inv(expm(A_3))
```

پاسخ ب:

ابتدا یک تابع (یا ***function***) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

جدول ۲-۱-۲. تابع نوشته‌شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای محاسبه ماتریس انتقال حالت.

```
function [Phi] = State_Trans (A)
%%% THIS FUNCTION CALCULATES THE
%%% STATE TRANSITION MATRIX OF MATRIX "A"

   t = sym('t');
   Phi = expm(A * t);
end
```

پاسخ‌های حاصل از تابع تعریف‌شده، در جدول (۲-۱-۳) آورده شده‌اند.

جدول ۲-۱-۳. پاسخ ماتریس انتقال حالت به کمک تابع نوشته‌شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای محاسبه ماتریس انتقال حالت.

```
clear all;
close all;
clc;

A1 = [0 1; 0 0];
Phi1 = State_Trans (A1)
A2 = [-1 1; 0 -5];
Phi2 = State_Trans (A2)
A3 = [-3 8; 0 -3];
Phi3 = State_Trans (A3)
=======================================
Phi1 =
[ 1, t]
[ 0, 1]
Phi2 =
[ exp(-t), exp(-t)/4 - exp(-5*t)/4]
[       0,                exp(-5*t)]
Phi3 =
[ exp(-3*t), 8*t*exp(-3*t)]
[         0,     exp(-3*t)]
```

پاسخ سوال دوم:

کد *MATLAB*:

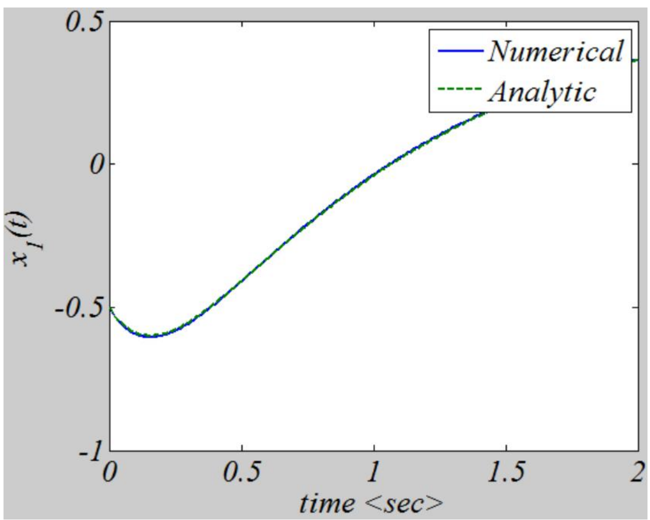
کد نوشته شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** در جدول (۲-۱) دیده می‌شود.

جدول ۲-۱-۴. کد نوشته شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای حل عددی معادله فضای حالت سوال شماره ۱ قسمت **د** و شبیه‌سازی پاسخ سیستم (روش حل عددی: اولر).

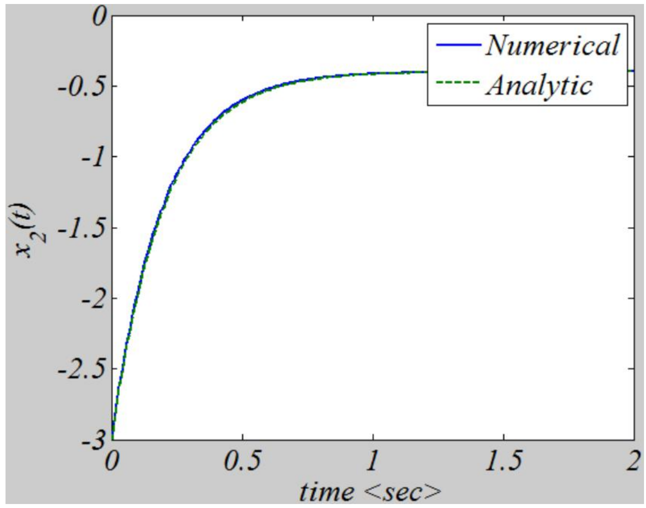
```
clear all;
close all;
clc;
%%%%%%%%%%%%5 TIME DOMAIN DISCRETIZATION
t0 = 0;
tf = 2;
dt = 0.01;
t = t0:dt:tf;
%%%%%%%%%%%%%% INITIAL VALUES
x1(1) = -0.5;
x2(1) = -3;
u(1) = 1;
%%%%%%%%%%%%%% EULER's METHOD
for i = 2:length(t)
    u(i) = 1;
    x1 (i) = x1(i-1) + dt*(-x1(i-1)+x2(i-1)+u(i));
    x2 (i) = x2(i-1) + dt*(-5*x2(i-1)-2*u(i));
end
y_1 = x1(1,:)+4.*x2(1,:)+0.5.*u(1,:);
x_1_analytic = -(7/4).*exp(-t)+(13/20).*exp(-5.*t)+0.6;
x_2_analytic = -0.4-2.6.*exp(-5.*t);
y_analytic = -0.5-1.75.*exp(-t)-8.95.*exp(-5.*t);
figure (1)
plot (t,x1(1,:),t,x_1_analytic(1,:))
figure (2)
plot (t,x2(1,:),t,x_2_analytic(1,:))
figure (3)
plot(t,y_1,'b-',t,y_analytic,'r--')
```

ترسیم پاسخ متغیرهای حالت و خروجی:

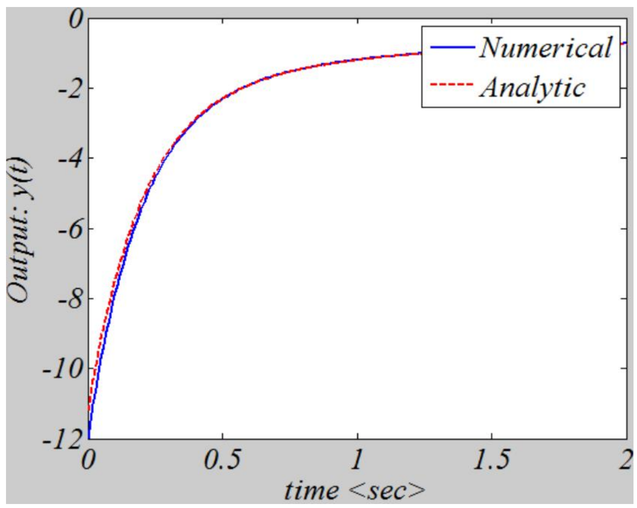
پاسخ متغیرهای حالت اول و دوم به همراه خروجی به ترتیب در شکل‌های (۲-۱)، (۲-۲) و (۲-۳) دیده می‌شوند.



شکل ۲-۱. پاسخ حل عددی متغیر حالت اول، x_1، بر حسب زمان در بازه ۳ ثانیه‌ای و مقایسه آن با پاسخ تحلیلی x_1



شکل ۲-۲. پاسخ حل عددی متغیر حالت دوم، x_2 بر حسب زمان در بازه ۳ ثانیه‌ای و مقایسه آن با پاسخ تحلیلی x_2



شکل ۲-۳. پاسخ حل عددی خروجی، $y(t)$، بر حسب زمان در بازه ۳ ثانیه‌ای و مقایسه آن با پاسخ تحلیلی $y(t)$.