پاسخ‌های قسمت اول:

پاسخ سوال شماره یک

پاسخ قسمت الف:

ابتدا معادله ماتریسی شبه-لیاپانوف داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^TP+PA+2\alpha P=-Q \quad \Longrightarrow \quad (A^TP+\alpha P)+(PA+\alpha P)=-Q$$

لذا داریم:

$$(A^T+\alpha I)P+P(A+\alpha I)=-Q \tag{۱-۱}$$

حالا با تعریف ماتریس جدید $\bar{A}$ به صورت $\bar{A}=A+\alpha I$, داریم: (توجه کنید که رابطه $\bar{A}^T=A^T+\alpha I$ برقرار است!)

$$\bar{A}^TP+P\bar{A}=-Q \tag{۲-۱}$$

اینجا با توجه به قضیه پایداری لیاپانوف برای سیستم خطی $\dot{x}(t)=\bar{A}x(t)$, با توجه به این‌که ماتریس P در رابطه (۱-۲) فوق, یکتا و مثبت معین و متقارن است داریم:

$$V=x^TPx \quad \rightarrow \quad \dot{V}=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}=x^T\bar{A}^TPx+x^TP\bar{A}x=x^T(\bar{A}^TP+P\bar{A})x \tag{۳-۱}$$

حالا با جانشانی از رابطه (۱-۲) در رابطه (۱-۳) داریم:

$$V=x^TPx \quad \rightarrow \quad \dot{V}=-x^TQx \tag{۴-۱}$$

هم‌چنین چون در صورت سوال گفته شده که ماتریس Q مثبت معین و متقارن است, لذا طبق قضیه پایداری مجانبی لیاپانوف, سیستم خطی $\dot{x}(t)=\bar{A}x(t)$ پایدار مجانبی است و لذا همه مقادیر ویژه ماتریس $\bar{A}$ در سمت چپ محور موهومی قرار می‌گیرند و داریم: $\lambda_{\bar{A}}<0$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\det(\lambda_{\bar{A}}I-\bar{A})=0 \quad \Rightarrow \quad |\lambda_{\bar{A}}I-(A+\alpha I)|=0 \quad \rightarrow \quad |(\lambda_{\bar{A}}-\alpha)I-A|=0 \tag{۵-۱}$$

توجه داریم که از طرفی, مسئله مقدار ویژه برای هر ماتریس دلخواه A به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\det(\lambda_AI-A)=|\lambda_AI-A|=0 \tag{۶-۱}$$

با مقایسه دو رابطه (۱-۵) و (۱-۶), داریم:

$$\lambda_{\bar{A}}-\alpha=\lambda_A \tag{۷-۱}$$

با توجه به این‌که می‌دانیم $\lambda_{\bar{A}}<0$ است, لذا داریم:

$$\lambda_{\bar{A}}<0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\lambda_{\bar{A}}-\alpha}_{=\lambda_A}<-\alpha \quad \Longrightarrow \quad \lambda_A<-\alpha \tag{۸-۱}$$

اثبات طرف دیگر این قضیه برعهده دانشجویان است.

پاسخ قسمت ب:

در واقع تفاوت اصلی میان دو تعریف پایداری به مفهوم لیاپانوف و پایداری مجانبی در این است که در حالت پایداری مجانبی حتماً مقادیر ویژه ماتریس A باید سمت چپ محور موهومی باشند ولی در تعریف پایداری به مفهوم لیاپانوف, مقادیر ویژه ماتریس A باید سمت راست محور موهومی نباشند, یعنی می‌توانند روی محور موهومی هم باشند.

حالا توجه داریم که اگر $A^T = -A$ باشد؛ حتماً درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A باید برابر صفر باشند:

$$[a_{ij}]^T = -[a_{ij}] \implies [a_{ji}] = -[a_{ij}] \implies [a_{ij}] + [a_{ji}] = 0 \qquad (۹\text{-}۱)$$

اگر $i = j$ باشد درایه‌های روی قطر به دست می‌آیند و داریم:

$$[a_{ii}] + [a_{ii}] = 0 \implies [a_{ii}] = 0 \qquad (۱۰\text{-}۱)$$

یعنی اگر $A^T = -A$ باشد, فرم کلی ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱(n-۱)} & a_{۱n} \\ -a_{۱۲} & ۰ & \cdots & \vdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{۱(n-۱)} & \cdots & \cdots & ۰ & a_{(n-۱)n} \\ -a_{۱n} & -a_{۲n} & \cdots & -a_{(n-۱)n} & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

در ادامه برای $n = 2,3$ قضیه را اثبات می‌کنیم و برای بقیه مقادیر n نیز به همین ترتیب قابل اثبات خواهد بود.

اثبات برای $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix} \implies |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} \\ a_{12} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_{12}^2 = 0 \;\to\; \lambda_{1,2} = \pm j a_{12} \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

با توجه به این‌که این ماتریس مرتبه دو, دارای دو مقدار ویژه روی محور موهومی است, لذا سیستم خطی نامتغیر با زمان متناظر با آن پایدار به مفهوم لیاپانوف است ولی پایدار مجانبی نیست.

اثبات برای $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \implies |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & \lambda & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2)\lambda = 0 \;\to\; \lambda_{1,2,3} = \left\{0, \pm j\sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2}\right\} \qquad (۱۳\text{-}۱)$$

با توجه به این‌که این ماتریس مرتبه سه, دارای سه مقدار ویژه روی محور موهومی است, لذا سیستم خطی نامتغیر با زمان متناظر با آن پایدار به مفهوم لیاپانوف است ولی پایدار مجانبی نیست.

و به همین ترتیب برای بقیه مقادیر n نیز می‌توان قضیه را اثبات نمود.

پاسخ سوال شماره دو:

پاسخ قسمت الف:

با در نظر گرفتن متغیرهای حالت سیستم به صورت $x_1 \approx x(t)$ و $x_2 \approx \dot{x}(t)$ خواهیم داشت:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \implies \frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} - x \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\varepsilon(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{bmatrix} \qquad (۱\text{-}۲)$$

حالا با انتخاب کاندیدای $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ داریم:

بررسی مثبت معینی تابع کاندیدای لیاپانوف:

چون تابع مذکور همواره پیوسته و مشتق‌پذیر بوده و به ازاء همه مقادیر x_1 و x_2, بزرگ‌تر از صفر است و حالت مساوی صفر فقط به ازاء یک نقطه $x_1 = x_2 = 0$ اتفاق می‌افتد, پس تابع $V(\vec{x})$ معرفی شده می‌تواند به عنوان کاندیدای لیاپانوف انتخاب شود.

بررسی پایداری:

مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف $V(\vec{x})$ را در خلال مسیرهای حرکت سیستم ون-در-پل بررسی می‌کنیم و داریم:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{x}) = \dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_2) + 2x_2(-\varepsilon(x_1^2 - 1)x_2 - x_1) \tag{۲-۲}$$

که با ساده‌سازی کردن آن داریم:

$$\dot{V} = -2\varepsilon(x_1^2 - 1)x_2^2 \tag{۲-۳}$$

چون ثابت ε منفی است, لذا مشتق تابع لیاپانوف (یعنی: $\dot{V}$) منفی نیمه معین می‌باشد در صورتی که داشته باشیم $x_1^2 - 1 \le 0$. در نتیجه به ازاء این محدوده, سیستم پایدار به مفهوم لیاپانوف است ولی توجه شود که مجانبی نیست.

یعنی تابع کاندیدای لیاپانوف $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ فقط در محدوده $|x_1| \le 1$ یک تابع لیاپانوف است و در خارج این محدوده معرف یک تابع لیاپانوف نیست. و به عبارت دیگر در خارج محدوده $|x_1| \le 1$؛ ممکن است که سیستم پایدار باشد ولی با کمک این تابع لیاپانوف راجع به پایداری سیستم نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ قسمت ب:

اگر متغیرهای حالت را به صورت $x_1 \approx x(t)$ و $x_2 \approx \int_0^t x\,dt$ انتخاب می‌کردیم, آن‌گاه معادلات فضای حالت به صورت زیر می‌شد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \varepsilon\left(\frac{x_1^2}{3} - 1\right)x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \tag{۲-۴}$$

و با کمک تابع کاندیدای لیاپانوف معرفی‌شده داریم:

$$\dot{V}(\vec{x}) = -2\varepsilon x_1^2\left(\frac{x_1^2}{3} - 1\right) \tag{۲-۵}$$

چون ثابت ε منفی است, لذا مشتق تابع لیاپانوف (یعنی: $\dot{V}$) منفی نیمه معین می‌باشد در صورتی که داشته باشیم $x_1^2 - 3 \le 0$. در نتیجه به ازاء این محدوده, سیستم پایدار به مفهوم لیاپانوف است ولی توجه شود که مجانبی نیست.

یعنی تابع کاندیدای لیاپانوف $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ فقط در محدوده $|x_1| \le \sqrt{3}$ یک تابع لیاپانوف است و در خارج این محدوده معرف یک تابع لیاپانوف نیست. و به عبارت دیگر در خارج محدوده $|x_1| \le \sqrt{3}$؛ ممکن است که سیستم پایدار باشد ولی با کمک این تابع لیاپانوف راجع به پایداری سیستم نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ قسمت ج:

بدیهی است که انتخاب دومین دسته متغیرهای حالت مناسب‌تر است, زیرا با کمک آن می‌توان در محدوده بزرگ‌تری از صفحه-فاز سیستم راجع به پایداری آن اظهارنظر کرد.

پاسخ سوال شماره سه:

پاسخ قسمت الف:

روش‌های زیادی برای بررسی پایداری در کنترل کلاسیک داریم که اینجا روش آرایه‌های راوث-هارویتز[۱] را انتخاب می‌کنیم. ابتدا باید معادله مشخصه مدار بسته سیستم را به دست آوریم:

---

[1] **Routh-Hurwitz Array**

$$\det\{sI-A\}=0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} s & 3k \\ -2k & s+5k \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; s^2+(5k)s+(6k^2)=0 \tag{۳-۱}$$

و لذا با تشکیل آرایه‌های راوث-هارویتز داریم:

(۳-۲)

s^2	1	$6k^2$	0
s^1	$5k$	0	
s^0	$\dfrac{(5k)(6k^2)-(1)(0)}{5k}=6k^2$		

که برای پایداری مجانبی سیستم, باید همه درایه‌های سطر اول مثبت باشند:

$$5k>0,\;\; 6k^2>0 \quad\Rightarrow\quad k>0 \tag{۳-۳}$$

لذا شرط پایداری مجانبی این سیستم $k>0$ است.

پاسخ قسمت ب:

نقطه تعادل این سیستم, $\vec{x}_e=(0,0)$ است. نخست ماتریس Q را برابر با $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ قرار داده و معادله لیاپانوف را حل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}0&2k\\-3k&-5k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-3k\\2k&-5k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \tag{۳-۴}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&2kp_{12}+2kp_{12}=-1\\&2kp_{22}-3kp_{11}-5kp_{12}=0\\&-3kp_{12}-5kp_{22}-3kp_{12}-5kp_{22}=-1\end{aligned} \tag{۳-۵}$$

که با حل معادلات فوق به دست می‌آید: $p_{11}=\frac{7}{12k}, p_{12}=-\frac{1}{4k}, p_{22}=\frac{1}{4k}$. و داریم:

$$P=\begin{bmatrix}\frac{7}{12k}&-\frac{1}{4k}\\-\frac{1}{4k}&\frac{1}{4k}\end{bmatrix} \tag{۳-۶}$$

و با توجه به قضیه پایداری لیاپانوف برای سیستم‌های خطی, باید ماتریس P فوق مثبت معین باشد و لذا داریم: (**شروط سیلوستر**)

$$P_{11}=p_{11}=\frac{7}{12k}>0,\quad |P|=\begin{vmatrix}\frac{7}{12k}&-\frac{1}{4k}\\-\frac{1}{4k}&\frac{1}{4k}\end{vmatrix}=\frac{1}{12k^2}>0 \;\Rightarrow\; k>0 \tag{۳-۷}$$

لذا سیستم به ازاء $k>0$ پایدار مجانبی است.

پاسخ سوال شماره چهار

پاسخ قسمت الف:

با توجه به فرم کانونیکال رویتگر معرفی شده (در کتاب *اصول کنترل مدرن*؛ تالیف پروفسور علی خاکی صدیق موجود است, لطفاً رجوع کنید), داریم:

$$G(s)=\frac{s+1}{s^3}=\frac{b_2s^2+b_1s^1+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s^1+a_0} \;\Rightarrow\; \begin{cases}a_0=0 & a_1=0 \quad a_2=0\\ b_0=1 & b_1=1 \quad b_2=0\end{cases} \tag{۴-۱}$$

و لذا با توجه به فرم کانونیکال رویتگر, خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ C=[0\quad 0\quad 1],\ \Longrightarrow\ \begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y=[0\quad 0\quad 1]x(t)\end{cases} \qquad (۲-۴)$$

از طرف دیگر با توجه به دیاگرام جعبه‌ای سیستم غیرخطی, برای سیگنال خطای سیستم داریم:

$$e(t)=0-y=-y(t)\ \Longrightarrow\ e(t)=-x_3 \qquad (۳-۴)$$

و هم‌چنین سیگنال ورودی کنترلی به ***Plant*** نیز عبارت است از:

$$u=f(e)=e-e^3\ \Longrightarrow\ u(t)=(-x_3)-(-x_3)^3=-x_3+x_3^3 \qquad (۴-۴)$$

و در نهایت, توجه داریم که بلوک غیرخطی کنترلر, متغیر حالت جدید به سیستم تحمیل نمی‌کند و لذا داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u(t)\\ \dot{x}_2=x_1+u(t)\\ \dot{x}_3=x_2\\ y(t)=x_3\\ u(t)=-x_3+x_3^3\end{cases}\ \Longrightarrow\ \begin{cases}\dot{x}_1=-x_3+x_3^3\\ \dot{x}_2=x_1-x_3+x_3^3\\ \dot{x}_3=x_2\\ y=x_3\end{cases} \qquad (۵-۴)$$

پاسخ قسمت ب:

متاسفانه این قسمت سوال غلط است!!! (این سوال عیناً از کتاب *اصول کنترل مدرن*, تالیف: پروفسور علی خاکی صدیق اقتباس شده و متاسفانه نیاز به اصلاح دارد. بابت اشتباه پیش آمده عذرخواهی می‌کنم)