قسمت اول: لطفاً حل هر چهار سوال را به صورت دستی بنویسید.

سوال شماره یک

الف: نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی کوچک‌تر از $-\alpha$ هستند؛ اگر و تنها اگر برای هر ماتریس مثبت معین متقارن Q, ماتریس یکتای مثبت معین متقارن P وجود داشته باشد که معادله ماتریسی شبه-لیاپانوف زیر را برآورده سازد؟

$$A^T P + PA + 2\alpha P = -Q$$

ب: برای سیستم با معادلات فضای حالت $\dot{x}(t) = Ax(t)$؛ نشان دهید که اگر $A = -A^T$ باشد, سیستم پایدار به مفهوم لیاپانوف[1] است و نه پایدار مجانبی[2].

راه‌نمایی: تعاریف مربوط به پایداری با مفهوم لیاپانوف و پایداری مجانبی عبارتند از:

پایدار به مفهوم لیاپانوف: در سیستم با معادلات حالت $\dot{x}(t) = F[x(t), 0, t]$؛

نقطه تعادل x_e را ***پایدار به مفهوم لیاپانوف*** گویند, اگر برای هر t_0 و هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد که به ازاء $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$, برای همه زمان‌های $t \geq t_0$, $\|x(t_0) - x_e\| < \varepsilon$ باشد.

پایدار مجانبی: در سیستم با معادلات حالت $\dot{x}(t) = F[x(t), 0, t]$؛

نقطه تعادل x_e را ***پایدار مجانبی*** گویند, اگر **الف:** پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد و **ب:** برای همه t_0 ها, یک $\rho(t_0) > 0$ موجود باشد که به ازاء $\|x(t_0) - x_e\| \leq \rho$, برای $t \to \infty$ رابطه $\|x(t_0) - x_e\| \to 0$ برقرار باشد.

سوال شماره دو

سیستم غیرخطی متناظر با معادله وندرپل[3] عبارت است از: $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ که در آن ε یک ثابت منفی است.

الف: با انتخاب متغیرهای حالت $x_1 = x$ و $x_2 = \dot{x}$؛ معادلات فضای حالت سیستم را به دست آورده و با کمک تابع کاندیدای $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$, به بررسی پایداری سیستم بپردازید؟

ب: با انتخاب متغیرهای حالت $x_1 = x$ و $x_2 = \int_0^t x\,dt$؛ معادلات فضای حالت سیستم را به دست آورده و با کمک تابع کاندیدای $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$, به بررسی پایداری سیستم بپردازید؟

ج: انتخاب کدام فضای حالت از بین (**الف**)و (**ب**) را از نظر مناسب بودن برای بررسی پایداری سیستم, پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

سوال شماره سه

سیستم خطی نامتغیر با زمان $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3k \\ 2k & -5k \end{bmatrix} x(t)$ را در نظر بگیرید.

الف: با کمک یکی از روش‌های کنترل کلاسیک (روش دلخواه)؛ محدوده پارامتر k را برای پایداری مجانبی سیستم به دست آورید؟

---

[1] stable in the sense of Lyapunov
[2] asymptotically stable
[3] Van-Der-Pole

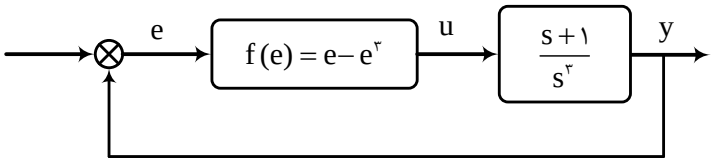
ب: با کمک روش مستقیم[۴] (روش دوم) لیاپانوف؛ محدوده پارامتر k را برای پایداری مجانبی سیستم به دست آورید؟ و با نتیجه قسمت قبل مقایسه کنید.

سوال شماره چهار

در دیاگرام جعبه‌ای سیستم مدار بسته شکل (۴-۱)؛

الف: متغیرهای حالت را به گونه‌ای تعریف کنید که سیستم خطی به صورت کانونیکال رویتگر[۵] باشد؟ سپس معادلات کامل سیستم (غیرخطی) را به دست آورید؟ (اگر با فرم کانونیکال رویتگر آشنایی ندارید, لطفاً ابتدا به منابع مناسب مراجعه کنید و این فرم کانونیکال معروف را یاد بگیرید)

ب: با قرار دادن $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$؛ نشان دهید که $V(\vec{x})$ یک تابع مناسب لیاپانوف برای سیستم است؟



شکل ۴-۱. دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم مدار بسته غیرخطی.

۱- مهلت تحویل تمرین سری ۴، **۱۲ روز** است. لطفاً تمرین ها را تا **قبل جلسه حل تمرین درس کنترل پیشرفته ۱** روز **شنبه ۱۸ آذرماه** در باکس شماره ۲۶ جنب اداره آموزش دانشکده مکانیک بیندازید.
۲- در صورتی که نیاز به راهنمایی برای حل هر کدام از سوال ها دارید، می توانید به اینجانب مراجعه کنید.
۳- لطفاً تمرین ها را به صورت انفرادی حل کنید. تمرین های دانشجویان مشابه هم نباشد.
۴- سایت درس کنترل پیشرفته ۱: wp.kntu.ac.ir/hrahmanei/teach_assist.html

موفق باشید.

[۴] Lyapunov's direct method
[۵] observer canonical form