**لطفاً حل هر چهار سوال را به صورت دستی بنویسید.**

## سوال شماره یک

یک سیستم دینامیکی خطی متغیر با زمان با معادلات فضای حالت به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & e^{-t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}e^{-3t} & 1-e^{-2t}\end{bmatrix}x(t)\end{cases} \qquad (1-1)$$

**الف:** نشان دهید این سیستم خطی متغیر با زمان پیوسته در زمان $t=0$ کنترل‌پذیر حالت است؟

**ب:** ورودی $u(t)$ را طوری تعیین کنید که سیستم را در مدت زمان $t=1$ ثانیه, از حالت اولیه $x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ به حالت نهایی $x(1)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ برساند؟

## سوال شماره دو

موارد زیر را ثابت کنید:

**الف:** تحت تبدیل همانندی $x(t)=Tz(t)$ از فضای $\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$ به فضای جدید $\begin{cases}\dot{z}(t)=A^{*}z(t)+B^{*}u(t)\\ y(t)=C^{*}x(t)+Du(t)\end{cases}$؛ خاصیت‌های کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری یک سیستم دینامیکی خطی نامتغیر با زمان تغییر نخواهد کرد. (یعنی باید نشان دهید که اگر سیستم اولیه کنترل‌پذیر یا مشاهده‌پذیر باشد, سیستم جدید نیز کنترل‌پذیر یا مشاهده‌پذیر است)

**ب:** (**قضیه دوگانی**[1]) در سیستم دینامیکی خطی نامتغیر با زمان $\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$؛ جفت ماتریسی $(A,B)$ کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر جفت ماتریسی $(A^{T},B^{T})$ مشاهده‌پذیر باشد و جفت ماتریسی $(A,C)$ مشاهده‌پذیر است اگر و تنها اگر جفت ماتریسی $(A^{T},C^{T})$ کنترل‌پذیر باشد.

**ج:** (**کنترل‌پذیری پس از نمونه‌برداری**)

سیستم دینامیکی خطی نامتغیر با زمان $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ کنترل‌پذیر است. شرط لازم و کافی برای کنترل‌پذیری سیستم زمان گسسته معادل $\bar{x}(k+1)=\bar{A}\bar{x}(k)+\bar{B}u(k)$ با زمان نمونه‌گیری $T$, آن است که $\left|\mathrm{Im}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\right|\neq 2\pi m/T$ برای $m=1,2,\ldots$ و $\mathrm{Re}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)=0$ باشد.

## سوال شماره سه

سیستم رسته $n=4$ با فضای حالت مقابل را در نظر بگیرید: $\dot{x}=Ax+Bu$

[1] duality theorem

که در آن ماتریس‌های $A$ و $B$ عبارتند از:

$$A=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \omega_1 & 0 & 0\\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_2 & \omega_2\\ 0 & 0 & -\omega_2 & \sigma_2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

که در ماتریس‌های فوق؛ $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\alpha$, $\beta$ و $\gamma$ همه مقادیر حقیقی و اسکالر هستند.

مقادیر ویژه ماتریس $A$ عبارتند از:

$$\lambda_{1,2}=\sigma_1\pm j\omega_1$$
$$\lambda_{3,4}=\sigma_2\pm j\omega_2$$

**ثابت کنید** که این سیستم برای همه مقادیر $\alpha$, $\beta$ و $\gamma$ (مثبت, منفی یا صفر) همواره کنترل‌پذیر است.

## سوال شماره چهار

سیستمی با معادلات حالت زیر داده شده است:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases} \qquad (۱-۴)$$

که در آن $B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 1\\ -4 & 0 & -5\end{bmatrix}$ بوده و خروجی سیستم $y=x_1+x_2+x_3$ است.

**الف:** سیستم مشاهده‌پذیر است.

**ب:** سیستم مشاهده‌پذیر نیست.

(جواب باید با استدلال و عملیّات مناسب همراه باشد)

**۱**- مهلت تحویل تمرین سری ۴، **۷ روز** است. لطفاً تمرین ها را تا **قبل جلسه حل تمرین درس کنترل پیشرفته ۱** روز **شنبه ۲۵ آذرماه** در باکس شماره ۲۶ جنب اداره آموزش دانشکده مکانیک بیندازید.
**۲**- در صورتی که نیاز به راهنمایی برای حل هر کدام از سوال ها دارید، می توانید به اینجانب مراجعه کنید.
**۳**- لطفاً تمرین ها را به صورت انفرادی حل کنید. تمرین های دانشجویان مشابه هم نباشد.
**۴**- سایت درس کنترل پیشرفته ۱: wp.kntu.ac.ir/ghaffari/ghaffari-courses-adv1.htm
**۵**- ایمیل درس کنترل پیشرفته ۱: Hamid.rahmanei20@gmail.com

موفق باشید.