بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکدهٔ مهندسی مکانیک

پاسخ امتحان میان‌ترم درس کنترل پیشرفته ۱

نیمسال اوّل **کتاب و جزوه بسته** **آبان‌ماه ۱۳۹٤**

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه (دو ساعت و ربع)

نام و نام خانوادگی:	**حمید رحمانی**	**شماره دانشجویی:**

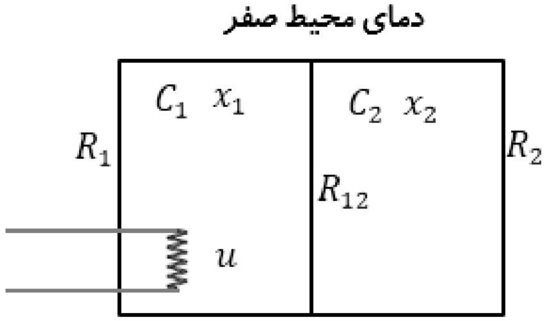
سوال	۱	۲	۳	٤	۵	مرتب‌نویسی	جمع
بارم	۵	۵	٤	۶	٤	۱	۲۵
نمره	۵	۵	٤	۶	٤	۱	۲۵

موفق باشید

☺☺☺

پاسخ مساله شماره ۱

برای سیستم حرارتی مذکور، رابطه تعادل حرارتی را به صورت زیر به کار می‌بریم:



$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(C_1 x_1) = +u - \dfrac{x_1}{R_1} - \dfrac{x_1 - x_2}{R_{12}} \\ \dfrac{d}{dt}(C_2 x_2) = -\dfrac{x_2}{R_2} + \dfrac{x_1 - x_2}{R_{12}} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \Rightarrow$$

پس از مقداردهی به پارامترهای مسئله داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = +u - 3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

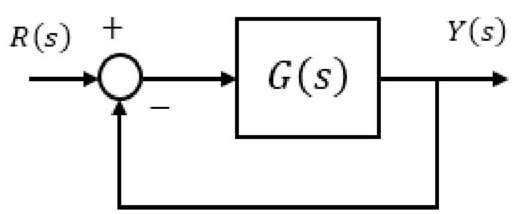
الف)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

ب)

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+6s+5}; \quad Poles = \{-5, -1\}; \quad Modes = \{e^{-5t}, e^{-t}\}$$

ج)



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{s+3}{s^2+7s+8}$$

د) قطب‌های این سیستم همان ریشه‌های مخرج تابع تبدیل سیستم مدار بسته بوده و داریم:

$$s^2 + 7s + 8 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2};$$

مودهای سیستم برابر با: $e^{\left(\frac{-7+\sqrt{17}}{2}\right)t}$ و $e^{\left(\frac{-7-\sqrt{17}}{2}\right)t}$هستند. همان طور که ملاحظه می‌شود، قطب‌های سیستم مدار بسته نسبت به حالت مدار باز از محور موهومی دورتر شده (به سمت چپ) و این یعنی مودهای سیستم مدار بسته نسبت به

حالت مدار باز مودهای سریع‌تری هستند و در نتیجه پاسخ سیستم در حالت مدار بسته که ترکیب خطّی همین مودهای سیستم مدار بسته است, پاسخ سریع‌تری نسبت به حالت مدار باز خواهد داشت.

پاسخ مساله شماره ۲

برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix};$ داریم:

الف) مقادیر ویژه از حل معادله زیر به دست می‌آیند:

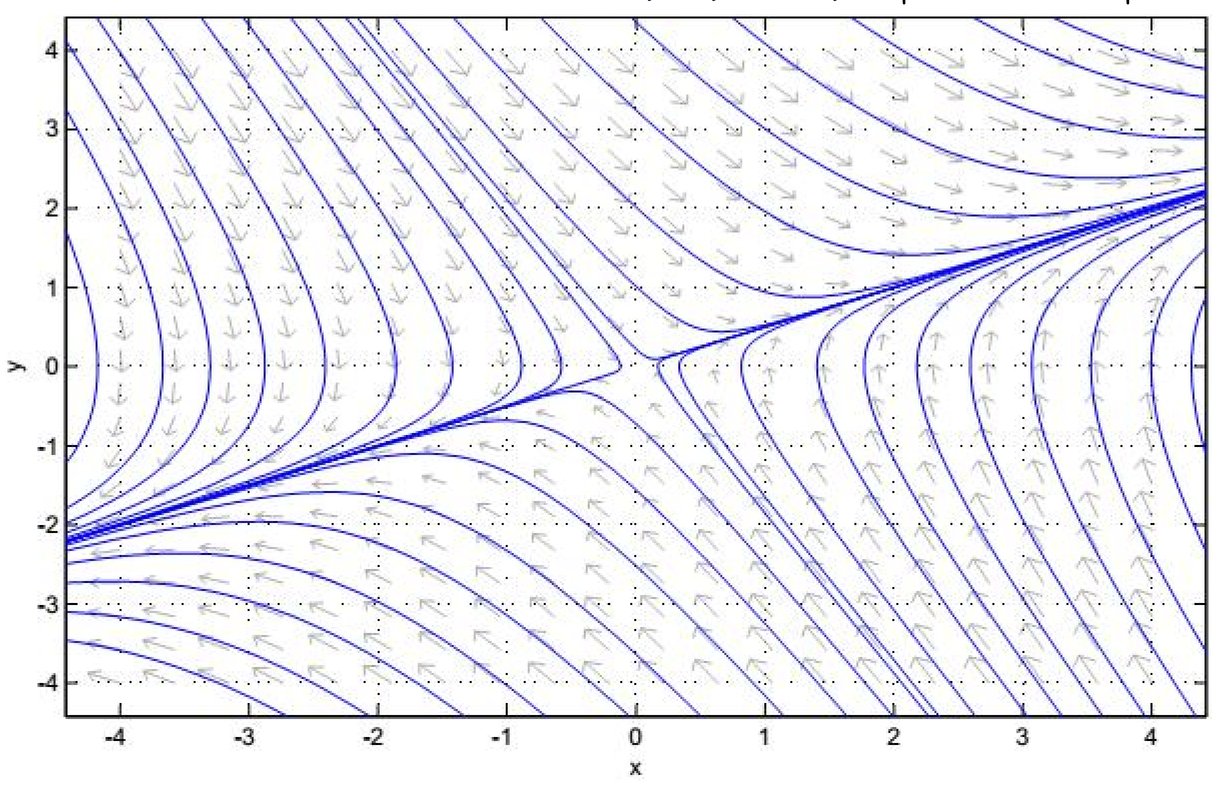
$$det\left(\lambda I-A\right)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda & -2\\ -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=0; \Rightarrow \left(\lambda+4\right)\left(\lambda-1\right)=0 \;\;\rightarrow\;\; \lambda_{1,2}=\{-4,+1\}$$

مودهای سیستم برابر e^{-4t} و e^{+t} هستند.

برای محاسبه هر بُردار ویژه متناظر با هر مقدار ویژه داریم:

$$\begin{cases}\left(\lambda_1 I-A\right)v^{(1)}=\overline{0} \Rightarrow \lambda_1=-4: \begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^{(1)}\\ v_2^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}; \quad v^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\\ \left(\lambda_2 I-A\right)v^{(2)}=\overline{0} \Rightarrow \lambda_2=+1: \begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^{(2)}\\ v_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}; \quad v^{(1)}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\end{cases}$$

ب) ترسیم مسیر حرکت سیستم به صورت زیر خواهد بود:



برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 6 & -3\end{bmatrix}$ داریم:

الف) مقادیر ویژه از حل معادله زیر به دست می‌آیند:

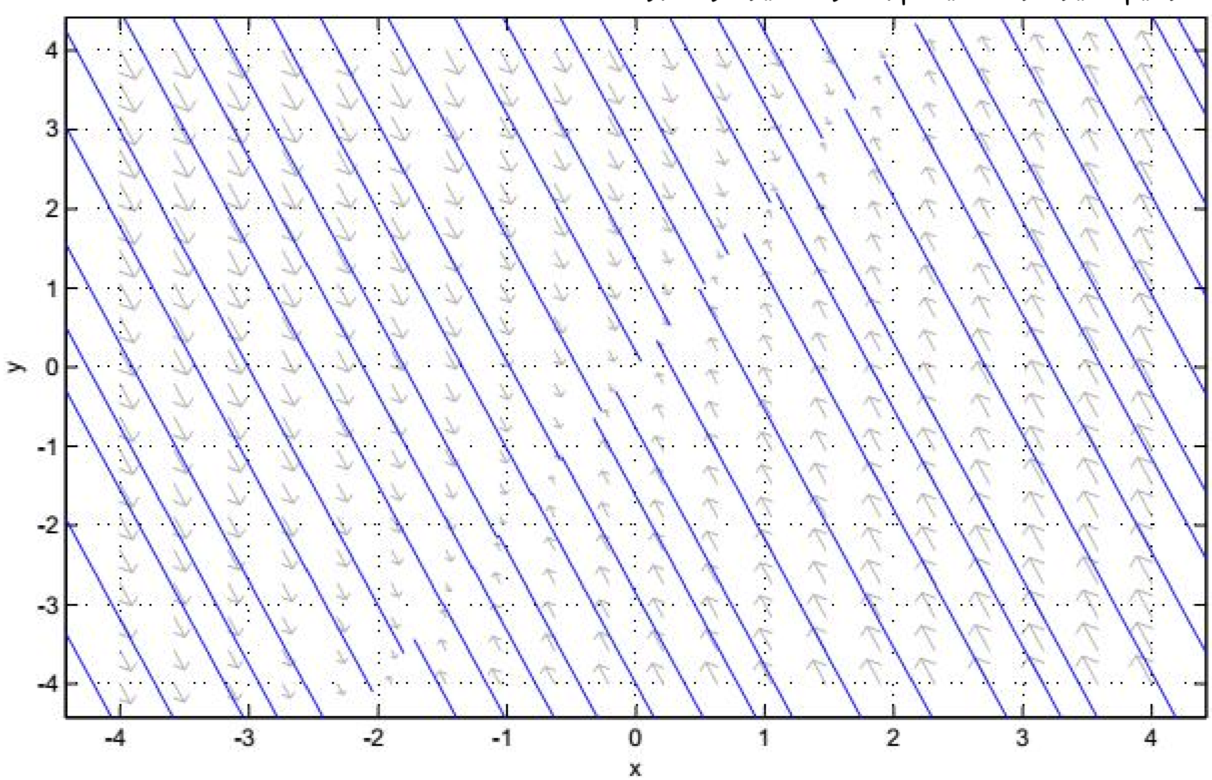
$$det\left(\lambda I-A\right)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ -6 & \lambda+3\end{vmatrix}=0; \Rightarrow \lambda\left(\lambda+5\right)=0 \;\;\rightarrow\;\; \lambda_{1,2}=\{-5,0\}$$

مودهای سیستم برابر e^{-5t} و 1 هستند.

برای محاسبه هر بُردار ویژه متناظر با هر مقدار ویژه داریم:

$$\begin{cases}\left(\lambda_1 I-A\right)v^{(1)}=\overline{0} \Rightarrow \lambda_1=-5: \begin{bmatrix}-3 & -1\\ -6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^{(1)}\\ v_2^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}; \quad v^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\\ \left(\lambda_2 I-A\right)v^{(2)}=\overline{0} \Rightarrow \lambda_2=0: \begin{bmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^{(2)}\\ v_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}; \quad v^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\end{cases}$$

ب) ترسیم مسیر حرکت سیستم به صورت زیر خواهد بود:



برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}$ داریم:

الف) مقادیر ویژه از حل معادله زیر به دست می‌آیند:

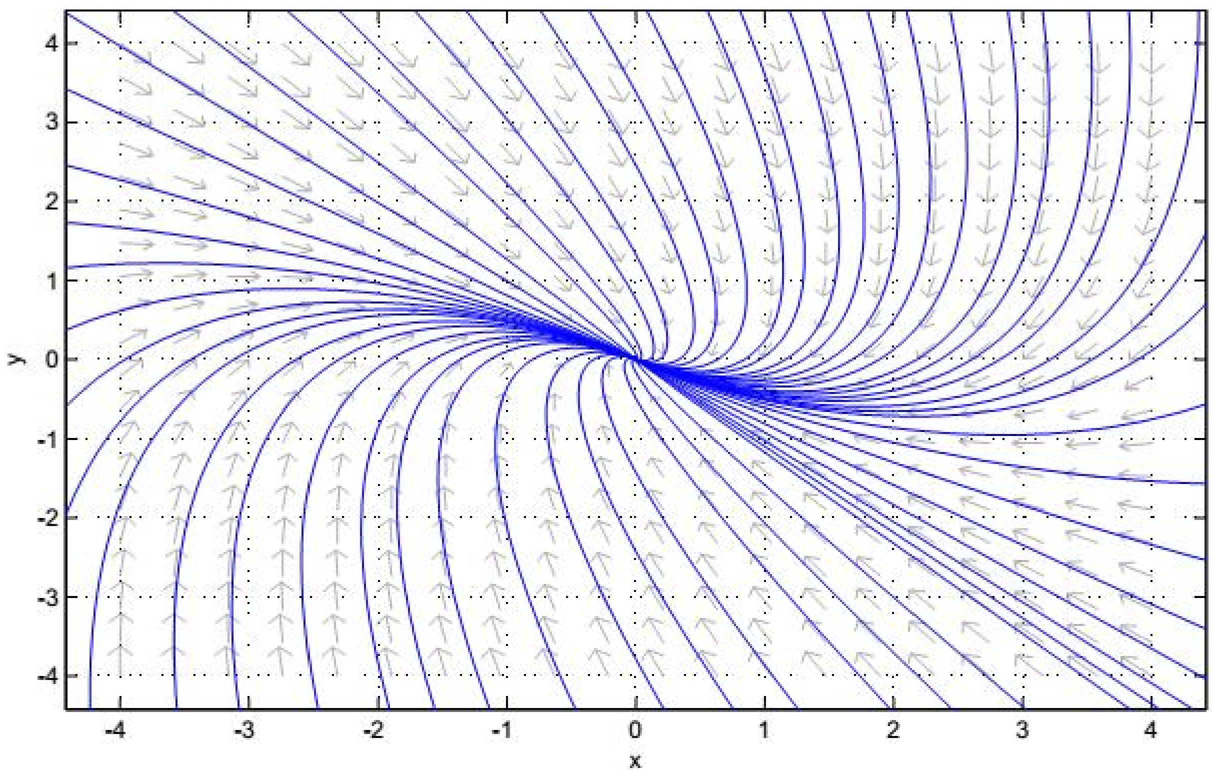
$$det\left(\lambda I - A\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0; \Rightarrow \left(\lambda+2\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \{-2,-2\}$$

مودهای سیستم برابر e^{-2t} و te^{-2t} هستند.

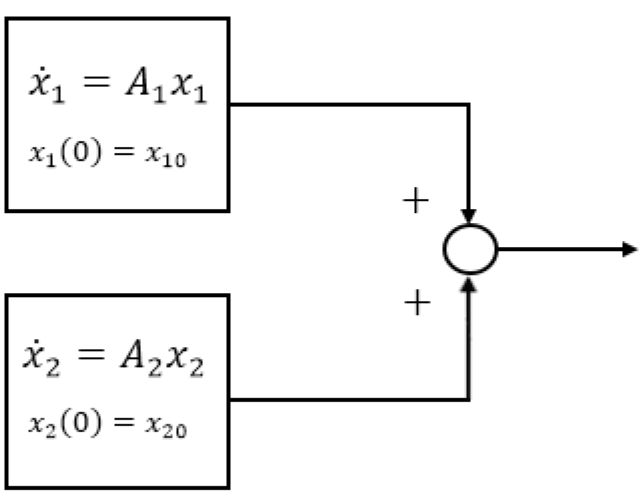
برای محاسبه هر بُردار ویژه متناظر با هر مقدار ویژه داریم:

$$\begin{cases} \left(\lambda_1 I - A\right)v^{(1)} = \overline{0} \Rightarrow \lambda_1 = -2: \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \left(\lambda_2 I - A\right)v^{(2)} = -v^{(1)} \Rightarrow \lambda_2 = -2: \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ب) ترسیم مسیر حرکت سیستم به صورت زیر خواهد بود:



پاسخ مساله شماره ۳



اگر سیستمی معادل با سیستم مذکور در نظر بگیریم, پاسخ سیستم معادل به صورت:

$$x_1(t) + x_2(t) = e^{A_1 t}x_{10} + e^{A_2 t}x_{20}$$

خواهد بود.

معادلات سیستم معادل مذکور نیز به صورت:

$$\dot{x}_1+\dot{x}_2=A_1x_1+A_2x_2$$
$$x_1(0)+x_2(0)=x_{10}+x_{20}$$

خواهند بود.

الف) اگر متغیّر حالت جدیدی به صورت $X=x_1+x_2$ تعریف کنیم, معادلات فضای حالت به صورت:

$$\dot{X}(t)=AX(t);\quad \Rightarrow \frac{d}{dt}(x_1+x_2)=(A_1+A_2)(x_1+x_2);\quad \Rightarrow$$
$$\dot{x}_1+\dot{x}_2=A_1x_1+A_1x_2+A_2x_1+A_2x_2$$

همان طور که به وضوح ملاحظه می‌گردد, سیستم جدید با مشخّصات مذکور را نمی‌توان در نظر گرفت.

ب) برای بررسی شرط $e^{At}=e^{(A_1+A_2)t}$ نیز توجّه شود که بایستی بسط پاسخ تیلور را در نظر بگیریم:

$$e^{At}=I+\frac{At}{1}+\frac{A^2t^2}{2!}+\dots$$
$$e^{(A_1+A_2)t}=I+\frac{(A_1+A_2)t}{1}+\frac{(A_1+A_2)^2t^2}{2!}+\dots$$

اگر جمله سوم بسط را محاسبه کنیم داریم:

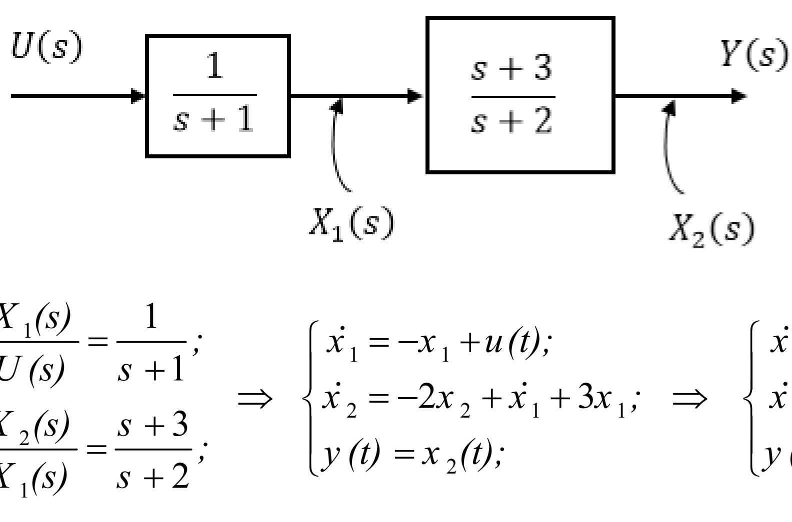
$$\left(A_1+A_2\right)^2=A_1^2+A_2^2+A_1A_2+A_2A_1;$$

یعنی تنها در حالتی همواره صحیح است که $A_2A_1=A_1A_2$ باشد. و در نتیجه در حالت کلّی این رابطه برقرار نمی‌باشد.

ولی اگر به جای ماتریس, اسکالر داشته باشیم این رابطه صحیح خواهد بود.

پاسخ مساله شماره ٤

برای دو بلوک سیستم مقابل روابط میدان لاپلاس را به صورت زیر داریم:



$$\begin{cases}\dfrac{X_1(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s+1}; \\ \dfrac{X_2(s)}{X_1(s)}=\dfrac{s+3}{s+2};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+u(t); \\ \dot{x}_2=-2x_2+\dot{x}_1+3x_1; \\ y(t)=x_2(t);\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+u(t); \\ \dot{x}_2=-2x_2+2x_1+u(t); \\ y(t)=x_2(t);\end{cases} \Rightarrow$$

الف)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix};\quad D=0;$$

ب)ابتدا ماتریس انتقال حالت را برای سیستم پیوسته محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$\phi(t)=e^{At}=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ \frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 2\left(e^{-t}-e^{-2t}\right) & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

و در نتیجه خواهیم داشت $A_d=\begin{bmatrix}0.36 & 0\\ 0.44 & 0.14\end{bmatrix}$.

و برای محاسبه B_d داریم:

$$B_d=\left(\begin{bmatrix}0.36 & 0\\ 0.44 & 0.14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.64 & 0\\ 0.44 & -0.86\end{bmatrix}.\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};\quad\Rightarrow$$

و در نتیجه پس از محاسبات داریم $B_d=\begin{bmatrix}0.64\\ 0.85\end{bmatrix}$.

$$A_d=\begin{bmatrix}0.36 & 0\\ 0.44 & 0.14\end{bmatrix};\qquad B_d=\begin{bmatrix}0.64\\ 0.85\end{bmatrix};$$

ج)توابع تبدیل را از روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$G_1(z)=\frac{X_1(z)}{U(z)}=(1-z^{-1})\,Z\left\{L^{-1}\left(\frac{G_1(s)}{s}\right)\right\}=(1-z^{-1})\,Z\left\{L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)\right\};\quad\Rightarrow$$

$$(1-z^{-1})\,Z\left\{1-e^{-t}\right\}=\frac{z-1}{z}\times\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right]=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$G_2(z)=\frac{X_2(z)}{U(z)}=(1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left(\frac{G_2(s)}{s}\right)\right\}=(1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left(\frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)}\right)\right\};\Rightarrow$$

$$(1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left(\frac{3}{2}.\frac{1}{s}-2.\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{s+2}\right)\right\}=\frac{z-1}{z}\times Z\left\{\frac{3}{2}-2e^{-T}+\frac{1}{2}e^{-2T}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$G_2(z)=\frac{0.85z-0.0244}{z^2-0.5z+0.0504}$$

$$G_1(z)=\frac{X_1(z)}{U(z)}=\frac{0.64}{z-0.36};\qquad G_2(z)=\frac{X_2(z)}{U(z)}=\frac{0.85z-0.0244}{z^2-0.5z+0.0504}$$

پاسخ مساله شماره ۵

الف) با تعریف متغیّر حالت به صورت $x_1(k) \sim y(k)$ داریم:

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + u(k+1); \\ y(k) = x(k); \end{cases}$$

ب) برای محاسبه تابع تبدیل, از دو طرف رابطه به دست آمده تبدیل Z گرفته وداریم:

$$zX(z) = aX(z) + zU(z); \quad \Rightarrow \quad (z-a)X(z) = zU(z); \rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{z}{z-a}$$

$$G(z) = \frac{z}{z-a}$$