مقدمه

◁ همان‌طور که می‌دانید، در مهندسی مکانیک (جامدات، سیالات، کنترل، ارتعاشات، مکاترونیک، خودرو و ...) روند تحلیل مسئله در چهار گام اساسی طی می‌شود:

۱- مدل‌سازی فیزیکی،

۲- مدل‌سازی ریاضی،

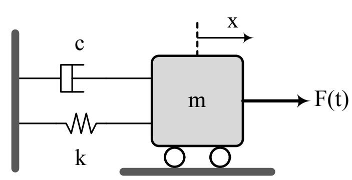
۳- حل معادلات و روابط موجود و شبیه‌سازی سیستم،

۴- تحلیل پاسخ و بررسی نتایج.

در ادامه ابتدا به معرفی مختصر هر کدام از گام‌های فوق می‌پردازیم.

گام اول: مدل‌سازی فیزیکی

◁ اغلب مسائلی که ما در تئوری کنترل بررسی می‌کنیم، شامل مسائل ارتعاشاتی، برقی، سیالاتی، حرارتی، ... و یا به صورت ترکیبی از موارد مذکور می‌باشند. مدل‌سازی فیزیکی هر مسئله‌ای شامل تعریف مختصات مناسب، اصول و قوانین اساسی حاکم بر رفتار آن سیستم، فرض‌های ساده‌سازی مسئله (خطی کردن سیستم غیرخطی در محدوده خاص، فرض تنش صفحه‌ای برای یک جسم الاستیک و ...) و نمایش فیزیکی سیستم به صورت یک مدل (که در اغلب موارد و با توجه به نوع دیدگاهی که به آن سیستم داریم، نسبت به سیستم اصلی بسیار ساده‌تر می‌باشد) بوده و لذا به عنوان مثال، در مدل‌سازی فیزیکی یک سیستم جرم-فنر-دمپر داریم:



شکل ۱. معرفی مدل فیزیکی برای بررسی یک فنر.

مثلاً برای این سیستم، فرض شده که رفتار فنر و دمپر در محدوده خطی قرار دارد، در حالی که می‌دانیم غالباً این المان‌ها دارای رفتار غیرخطی هستند. هم‌چنین مختصات مناسب برای مسئله انتخاب شده و برای تحلیل مسئله از اصل «قانون دوم حرکت نیوتن» استفاده می‌شود.

گام دوم: مدل‌سازی ریاضی

◁ برای مدل‌سازی ریاضی بایستی بتوانیم یک (یا چند) معادله دیفرانسیل که حاکم بر حرکت این سیستم هستند را استخراج کنیم. می‌دانیم که در مسائل دینامیکی برای استخراج معادله حرکت روش‌های متنوعی داریم، از جمله: روش تعادلی نیوتن، اولر، اصل دالامبر، روش انرژی، اصل هامیلتون، اصل انرژی پتانسیل کمینه و ... . مثلاً در این مثال ساده، روش تعادل نیرویی نیوتن را به کار می‌بریم:

$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; -kx - c\dot{x} + F(t) = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \qquad (۱)$$

معادله دیفرانسیل (۱)، بیان کننده معادله حرکت برای سیستم ارتعاشی شکل (۱) است. اما مدل‌سازی ریاضی سیستم به همینجا ختم نمی‌شود و در واقع می‌توان گفت که مدل ریاضی هنوز ناقص است زیرا برای حل معادله فوق نیاز به دو شرط؛ ۱- شرط مرزی و ۲- شرط اولیه است. البته در مدل‌سازی ریاضیاتی همه سیستم‌ها لزوماً نیاز به اعمال هر دو شرط به طور هم‌زمان نمی‌باشد، بلکه برای مسائل دینامیکی که معادله دیفرانسیل

حاکم بر آن از نوع معادله دیفرانسیل معمولی باشد، فقط نیاز به شرط اولیه داریم و برای حالتی که معادله حاکم از نوع مشتق جزئی باشد (مثلاً مسایل دینامیکی مورد بررسی در ارتعاشات سیستم‌های ممتد) علاوه بر شرایط اولیه نیاز به شرایط مرزی نیز داریم.

به هر حال، برای سیستم شکل (۱) فقط نیاز به شرایط اولیه داریم که با توجه به بیشترین درجه مشتق زمانی (اینجا برابر ۲ است) تعداد شرایط اولیه مشخص می‌شود. یعنی با تعریف شرایط اولیه به صورت زیر، مدل‌سازی ریاضیاتی تکمیل می‌شود:

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{۲}$$

پس از استخراج مدل ریاضی به گام سوم یعنی حل معادله می‌رسیم.

گام سوم: حل معادلات و روابط موجود و شبیه‌سازی سیستم

⊲ در این مرحله بایستی به حل معادله (۱) به همراه شرایط اولیه (۲) بپردازیم. روش‌های گوناگونی که برای این منظوروجود دارد شامل: ۱- روش‌های حل تحلیلی یا فرم بسته، ۲- روش‌های عددی و ۳- روش‌های نیمه-تحلیلی می‌شوند.

در درس معادلات دیفرانسیل با انواع روش‌های تحلیلی حل معادله دیفرانسیل آشنا شده‌اید و اینجا از ذکر جزئیات اجتناب می‌کنیم ولی باید توجه کرد که لزوماً معادله (یا معادلات) دیفرانسیل همه سیستم‌ها را نمی‌توان به صورت تحلیلی حل کرد و لذا باید به سراغ روش‌های حل عددی رفت.

روش‌های حل عددی بسیار زیادی برای یافتن پاسخ یک معادله دیفرانسیل معمولی معرفی شده‌اند که از جمله مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به: ۱- اولر، ۲- هیون، آدامز-بشفورث، ۳- آدامز-مولتون، ۴- روش رانج-کوتا و ... اشاره نمود.

(در ادامه معادله دیفرانسیل (۱) و شرط اولیه (۲) را به انواع روش‌های عددی حل خواهیم نمود)

گام چهارم: تحلیل پاسخ و بررسی نتایج

⊲ آخرین گام در حل مسئله، تحلیل پاسخ و بررسی نتایج آن است. این گام معمولاً با ارائه شکل‌ها و نمودارها، پاسخ متغیر میدانی بر حسب زمان (در مسائل دینامیکی)، پاسخ حوزه فرکانس (منحنی‌های دامنه-فرکانس) ترسیم نحوه تغییرات متغیرهای مجهول مسئله و ... صورت می‌پذیرد. هم‌چنین بایستی برای هر شکل و نمودار و به طور کلی هر نتیجه و پاسخی که به دست آورده‌اید، بتوانید یک تحلیل مناسب فیزیکی و یا توصیف ریاضیاتی ارائه کنید. برای حالت‌های مختلف پارامترها و به ازای بهره‌های مختلف کنترلرها و ...، تاثیر آن‌ها را در پاسخ نهایی و رفتار سیستم و انرژی کنترلی بهینه و ... بررسی کنید.

و به این ترتیب عملیات حل مسئله به اتمام می‌رسد.

در ادامه قصد داریم بیشتر راجع به گام سوم؛ حل معادلات و روابط موجود و شبیه‌سازی سیستم؛ توضیحاتی را ارائه دهیم.

معرفی نوع معادله دیفرانسیل مورد بحث در مباحث کنترلی

⊲ اصولاً معادله دیفرانسیل اغلب سیستم‌های مورد بررسی در کنترل را می‌توان در حالت کلی به صورت معادله فضای حالت زیر نمایش داد:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(x,t) \tag{۳}$$

که در آن $x_{n\times1}$ بردار متغیرهای حالت بوده و $f_{n\times1}(.)$ تابع برداری غیرخطی است. بدیهی است که اگر فرم معادلات دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم به صورت رابطه (۳) نباشد، می‌توان با تعریف مناسب متغیرهای حالت، ان را به فرم (۳) نوشت. مثلاً برای سیستم‌های دینامیکی کنترلی که دارای یک یا چند معادله دیفرانسیل از رسته n باشند، می‌توان با تعریف مناسب متغیرهای حالت، آن را به n معادله که هر معادله دارای رسته یک باشد، تبدیل نمود. یا برای سیستم‌هایی که دارای n درجه آزادی هستند می‌توانیم n معادله دیفرانسیل رسته دو (مثلاً شکل (۱) نشان دهنده یک سیستم دینامیکی یک درجه آزادی است و دارای یک معادله دیفرانسیل رسته دو است) بنویسیم و سپس با تعریف مناسب متغیرهای حالت، $2n$ معادله حالت که هر معادله دارای رسته یک باشد، بنویسیم.

مثلاً در معادله دیفرانسیل (۱)، متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_1 \approx x(t) \quad x_1 \approx \dot{x}(t) \tag{۴}$$

با این تعریف، می‌توان معادله دیفرانسیل (۱) را به صورت معادله (۳) که مد نظر ما بوده است تبدیل کنیم:

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (\frac{-k}{m})x_1 + (\frac{-c}{m})x_2 + (\frac{1}{m})F(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(x,t) \\ x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \tag{۵}$$

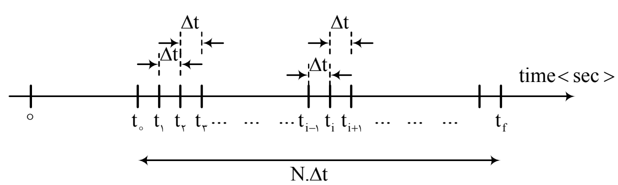
که در آن $\vec{x}$ بردار متغیرهای حالت بوده و $\vec{f}(x,t)$ تابع برداری مسئله است که به ترتیب عبارتند از: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ و $\vec{f}(x,t) = \begin{bmatrix} x_2 & (\frac{-k}{m})x_1 + (\frac{-c}{m})x_2 + (\frac{1}{m})F(t) \end{bmatrix}^T$.

معرفی روش‌های متنوع حل معادله دیفرانسیل (مورد بحث در کنترل مدرن)

◁ همان‌طور که گفتیم؛ قصد داریم معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x,t)$ (را که در حالت کلی غیرخطی است) به همراه شرایط اولیه آن، یعنی $x(0) = x_0$، حل کنیم. برای این منظور ابتدا باید دامنه زمان مسئله را گسسته‌سازی کنیم.

گسسته‌سازی دامنه زمان مسئله:

◁ فرض کنیم بازه زمانی مورد نیاز برای حل مسئله به صورت $t \in [t_0, t_f]$ داده شده باشد و ما می‌خواهیم این بازه را به تعداد N زیربازه کوچک به طول $\Delta t = t_i - t_{i-1}, \ (1 < i < n)$ تقسیم‌بندی کنیم. به شکل (۲) توجه کنید.



شکل ۲. گسسته‌سازی کردن دامنه زمان مسئله دینامیکی در بازه $t \in [t_0, t_f]$.

یعنی در واقع زمان را به صورت یک بردار $1 \times N$ در نظر گرفته‌ایم که مقدار المان 1×1 و $1 \times N$ آن به ترتیب برابر t_0 و t_f است و داریم: $t = [\underbrace{t_0, \ldots, t_f}_{\text{numbers: N}}]$.

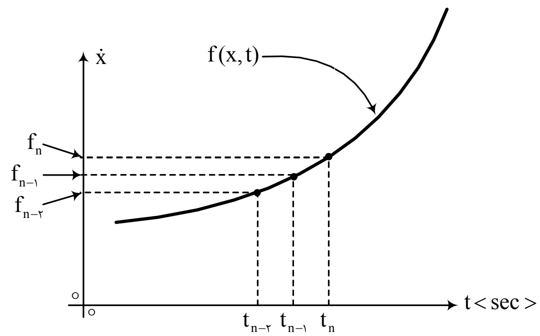
برای پیاده‌سازی بردار زمان مذکور در محیط نرم‌افزار ***MATLAB***، از کد زیر استفاده می‌شود:

جدول ۱. کد نوشته شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای گسسته‌سازی کردن دامنه زمان مسئله دینامیکی در بازه $t \in [t_0, t_f]$.

```
t0 = 0;
tf = 10;
dt = 0.01;
N = ceil((tf-t0)/dt);
t = t0:dt:tf;
```

۱- روش حل عددی آدامز-مولتون:

◁ پس از گسسته‌سازی نمودن دامنه زمان مسئله، بایستی به حل عددی معادله دیفرانسیل سیستم پرداخت. ابتدا به شکل (۳) توجه کنید. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، منحنی تابع مشتق زمانی $\frac{dx}{dt}$ بر حسب زمان (یا منحنی تابع $f(x,t)$ بر حسب زمان) معلوم است و ترسیم شده است.



شکل ۳. منحنی تغییرات تابع غیرخطی $f(x,t)$ بر حسب زمان (یا منحنی تغییرات $\dot{x}$ بر حسب زمان)، در بازه $t\in[t_0,t_f]$.

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)\;\Rightarrow\;dx=f(x,t)dt\;\Rightarrow\;\int_{x(t_{n-1})}^{x(t_n)}dx=\int_{t_{n-1}}^{t_n}f(x,t)dt\;\Rightarrow\;x(n)-x(n-1)=\int_{t_{n-1}}^{t_n}f(x,t)dt \qquad (۶)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید از طرفین رابطه (۳) انتگرال گرفته‌ایم. (فعلاً فرض می‌کنیم که فقط یک معادله داریم و در نتیجه حالت برداری را در نظر نمی‌گیریم)

در رابطه (۶) بسته به این‌که چه نوع و چه مرتبه‌ای از تقریب را برای تابع $f(x,t)$ در نظر بگیریم، روش‌های مختلف حل عددی (یا روش‌های مختلف انتگرال‌گیری عددی) پدید می‌آیند.

در روش حل عددی **آدامز-مولتون**، تقریب سهموی از تابع $f(x,t)$ را در نظر می‌گیریم. یعنی داریم:

$$f(x,t)=a(t-t_n)^2+b(t-t_n)+c \qquad (۷)$$

توجه داریم که در رابطه (۷)، سه ضریب مجهول داریم که بایستی آن‌ها را محاسبه کنیم و پس از آن، با جانشانی رابطه (۷) در رابطه (۶) و محاسبه انتگرال، رابطه نهایی حل عددی به دست می‌آید.

محاسبه ضرایب مجهول a، b و c در تقریب سهموی آدامز-مولتون:

با توجه به شکل (۳)، می‌دانیم $f(t_n)=f_n$، $f(t_{n-1})=f_{n-1}$ و $f(t_{n-2})=f_{n-2}$ است. لذا با جانشانی این سه قید در رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&@t=t_n \;\rightarrow\; f(t_n)=f_n \;\Rightarrow\; f_n=a(\underbrace{t_n-t_n}_{=0})^2+b(\underbrace{t_n-t_n}_{=0})+c \;\Rightarrow\; \boxed{c=f_n}\\
&@t=t_{n-1} \;\rightarrow\; f(t_{n-1})=f_{n-1} \;\Rightarrow\; f_{n-1}=a(\underbrace{t_{n-1}-t_n}_{=-\Delta t})^2+b(\underbrace{t_{n-1}-t_n}_{=-\Delta t})+c\\
&@t=t_{n-2} \;\rightarrow\; f(t_{n-2})=f_{n-2} \;\Rightarrow\; f_{n-2}=a(\underbrace{t_{n-2}-t_n}_{=-2\Delta t})^2+b(\underbrace{t_{n-2}-t_n}_{=-2\Delta t})+c
\end{aligned} \qquad (۸)$$

توجه داریم که $c=f_n$ به دست آمده است و برای محاسبه ضرایب مجهول a و b، دو معادله با دو مجهول داریم که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
f_{n-1}-f_n=g_1=a(-\Delta t)^2-b(\Delta t)\\
f_{n-2}-f_n=g_2=4a(\Delta t)^2-2b(\Delta t)
\end{aligned}\;\Rightarrow\;\begin{bmatrix}(\Delta t)^2 & -\Delta t\\ 4(\Delta t)^2 & -2\Delta t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix} \qquad (۹)$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق، داریم:

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\Delta t)^2 & -\Delta t\\ 4(\Delta t)^2 & -2\Delta t\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2(\Delta t)^3}\begin{bmatrix}\Delta t\{-2g_1+g_2\}\\ (\Delta t)^2\{-4g_1+g_2\}\end{bmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{cases}a=\dfrac{-2g_1+g_2}{2(\Delta t)^2}\\[2ex] b=\dfrac{-4g_1+g_2}{2(\Delta t)}\end{cases} \qquad (۱۰)$$

حالا پس از جانشانی ضرایب مجهول a، b و c در رابطه (۶) و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$x(n)-x(n-1)=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\{\frac{-2g_1+g_2}{2(\Delta t)^2}\left(t-t_n\right)^2+\frac{-4g_1+g_2}{2(\Delta t)}\left(t-t_n\right)^1+f_n\right\}dt \Rightarrow$$
$$x(n)-x(n-1)=\Delta t\left[\frac{-2g_1+g_2}{6}-\frac{-4g_1+g_2}{4}+f_n\right] \tag{11}$$

و در نهایت با جانشانی مقادیر g_1 و g_2 از رابطه (۹) در رابطه (۱۱) و ساده‌سازی آن داریم:

$$x(n)=x(n-1)+\frac{\Delta t}{12}\left[5f_n+8f_{n-1}-f_{n-2}\right] \tag{12}$$

و به این ترتیب رابطه مناسب برای حل عددی معادله دیفرانسیل (۳) و محاسبه مقادیر $x(t_i)$ در هر گام گسسته زمانی به دست آمده است. البته چون در سمت راست معادله (۱۲) اندیس n وجود دارد، لذا نمی‌توان به طور مستقیم از این رابطه برای حل عددی استفاده نمود و ابتدا بایستی یک جمله اصلاح‌کننده ایجاد کنیم تا مقدار f_n در سمت راست رابطه (۱۲) را محاسبه کند و در نهایت پاسخ $x(t_i)$ در هر گام قابل محاسبه خواهد بود. (لطفاً برای مطالعه بیشتر به مراجع مربوط به حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مراجعه کنید)

۲- روش حل عددی آدامز-بشفورث:

◁ برای اجتناب از مشکل به وجود آمده در معادله (۱۲) که به طور صریح مقدار $x(n)$ را نمی‌دهد، می‌توان از روش آدامز-بشفورث استفاده نمود. فرق این روش با روش آدامز-مولتون در این است که در معادله (۷) به جای t_n از گام زمانی t_{n-1} استفاده می‌شود و داریم:

$$f(x,t)=a(t-t_{n-1})^2+b(t-t_{n-1})+c \tag{13}$$

هم‌چنین محاسبه ضرایب مجهول a، b و c در زمان‌های t_{n-1}، t_{n-2} و t_{n-3} صورت می‌گیرد.

بقیه فرآیند حل عددی مانند روش آدامز-مولتون می‌باشد که توصیه می‌شود دانشجویان این فرآیند را انجام دهند و پس از محاسبات به رابطه زیر برای روش حل عددی آدامز-بشفورث برسند:

$$x(n)=x(n-1)+\frac{\Delta t}{12}\left[23f_{n-1}-16f_{n-2}+5f_{n-3}\right] \tag{14}$$

◁ در ادامه کد نوشته در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای حل عددی معادله دیفرانسیل (۱)، در جدول (۲) ارائه می‌شود:

جدول ۲. کد نوشته شده در نرم‌افزار ***MATLAB*** برای حل عددی معادله دیفرانسیل (۱).

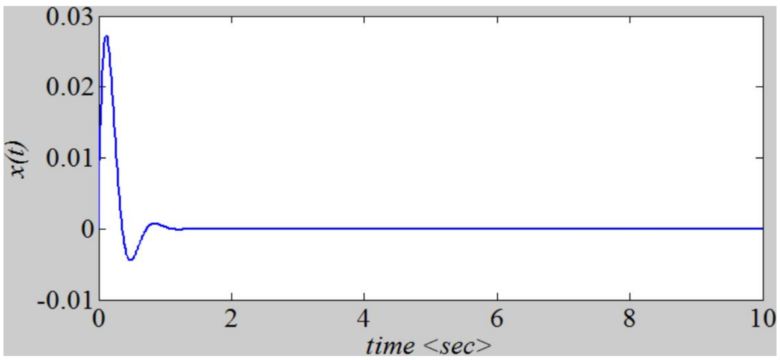
```
clear all;
close all;
clc;
%%%%%%%%%%%%%%5 TIME DOMAIN DISCRETIZATION
t0 = 0;
tf = 10;
dt = 0.01;
N = ceil((tf-t0)/dt);
t = t0:dt:tf;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARAMETER DEFINITIONS
k = 100;
m = 1;
c = 10;
%%%%%%%%%%%%%% INITIAL VALUE ALLOCATIONS
x1 (1) = 0;
x2 (1) = 0.5;
F  (1) = 0;
f1 (1) = x2(1);
f2 (1) = -(k/m)*x1(1)-(c/m)*x2(1)+(1/m)*F(1);

x1 (2) = x1(1) + (dt/12)*(23*f1(1));
x2 (2) = x2(1) + (dt/12)*(23*f2(1));
F  (2) = 0;
f1 (2) = x2(2);
f2 (2) = -(k/m)*x1(2)-(c/m)*x2(2)+(1/m)*F(2);
```

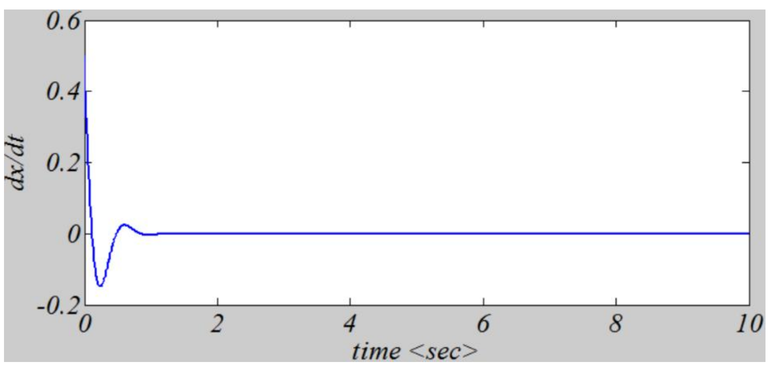
```
x1 (3) = x1(2) + (dt/12)*(23*f1(2)-16*f1(1));
x2 (3) = x2(2) + (dt/12)*(23*f2(2)-16*f2(2));
F  (3) = 0;
f1 (3) = x2(3);
f2 (3) = -(k/m)*x1(3)-(c/m)*x2(3)+(1/m)*F(3);

%%%%%%%%%%%% ADAMS-BASHFORTH NUMERICAL SIMULATIONS
for i = 3:length(t)-1
    F(i) = 0;
    f1(i) = x2(i);
    f2(i) = -(k/m)*x1(i)-(c/m)*x2(i)+(1/m)*F(i);
    x1(i+1) = x1(i) + (dt/12)*(23*f1(i)-16*f1(i-1)+5*f1(i-2));
    x2(i+1) = x2(i) + (dt/12)*(23*f2(i)-16*f2(i-1)+5*f2(i-2));
end
figure (1)
plot (t,x1)
figure (2)
plot (t,x2)
figure (3)
plot (x1,x2)
```

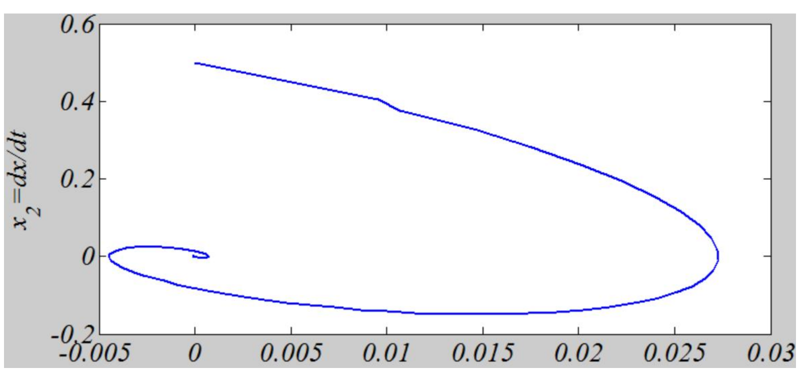
⊲ منحنی پاسخ مکان $x(t)$ و سرعت $\dot{x}(t)$ بر حسب زمان t و هم‌چنین مسیر حرکت (یا ***trajectory***) (x_2 بر حسب x_1) خروجی‌های کد مذکور خواهند بود که به ترتیب در شکل‌های (۴)، (۵) و (۶) ملاحظه می‌کنید.



شکل ۴. منحنی تغییرات پاسخ مکان بر حسب زمان، در بازه $t\in[0,10]$ ثانیه.



شکل ۵. منحنی تغییرات پاسخ سرعت بر حسب زمان، در بازه $t\in[0,10]$ ثانیه.



شکل ۶. منحنی تغییرات مسیر حرکت (یا ***trajectory***)، در بازه $t\in[0,10]$ ثانیه.