دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه دینامیک و کنترل

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) به فرم فضای حالت

درس سیستم‌های کنترل پیشرفته ۱

استاد

پروفسور علی غفّاری

تهیّه و تنظیم

حمید رحمانی

۲۷ مهر ۱۳۹۴

در این گزارش قصد داریم، چند روش مهم و کاربردی برای شبیه‌سازی پاسخ سیستم‌های کنترلی در فرم فضای حالت را به روش عددی به کمک نرم‌افزار $MATLAB$ با ذکر چند مثال ارائه کنیم. ۳ روش مهم برای این منظور شامل روش $Adams\ Bashforth$ ، روش $Runge\ Kutta$ و استفاده از ode۴۵ می‌باشند.

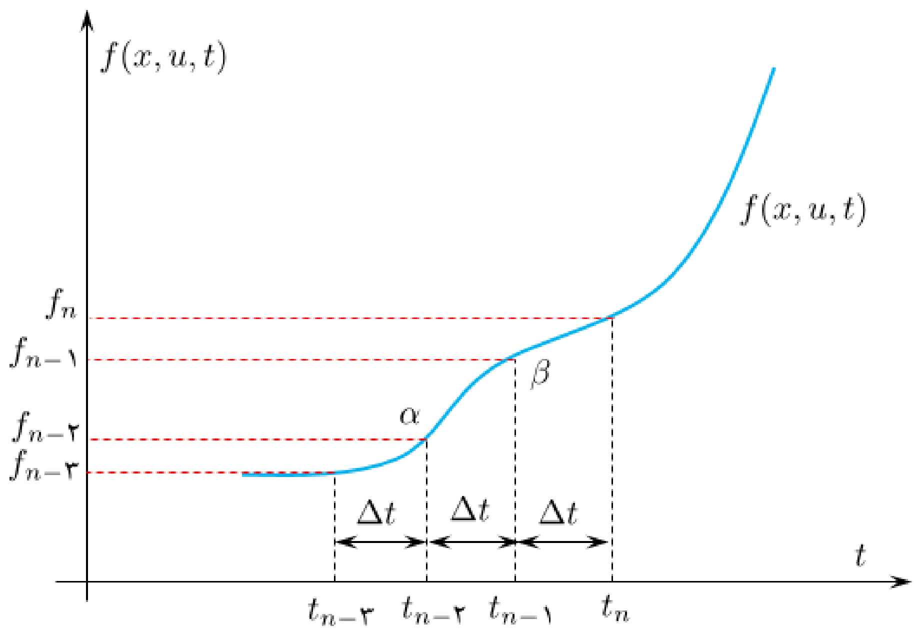
۱ـ حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی به روش آدامز-بشفورث

فرضاً **معادله دیفرانسیل معمولی** [۱] حاکم بر ارتعاشات یک سیستم دینامیکی را به روش‌های مرسوم (**نیوتن-اویلر** [۲] یا **انرژی** [۳] یا **لاگرانژ** [۴] یا **اصل همیلتون** [۵] و ...) به دست آورده‌ایم و به صورت زیر در آمده است:

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{۱}$$

در این معادله x **متغیّر حالت** سیستم [۶] ، u **ورودی** سیستم [۷] و t نشان‌دهنده **زمان** است.

برای درک بهتر روش حل مذکور، ابتدا به نمودار زیر توجّه می‌کنیم:



فرضاً این نمودار تابع $f(x,u,t)$ را در بُرهه‌ای از زمان حرکت سیستم نمایش می‌دهد.وقتی می‌خواهیم معادله دیفرانسیل را به صورت عددی حل کنیم، یعنی چون نمی‌خواهیم پاسخ را در همه زمان‌ها پیدا کنیم(t پیوسته باشد) در نتیجه محور زمان را به بازه‌های کوچک تقسیم می‌کنیم و طول هر بازه را برابر با Δt می‌گیریم:

$$\Delta t = t_i - t_{i-۱}; \quad i = ۱,۲,۳,...,n \tag{۲}$$

[۱] *Ordinary Differential Equation*
[۲] *Newton-Euler Method*
[۳] *Energy Method*
[۴] *Lagrange's Method*
[۵] *Hamilton Principle Method*
[۶] *State Space Variable*
[۷] *Input of System*

متناظر با این تقسیم‌بندی روی محور عمودی تابع $f(x,u,t)$ را هم تقسیم‌بندی می‌کنیم(ولی لزوماً این‌جا بازه‌ها یکسان **نیستند**). به این ترتیب تا این‌جای کار محور زمان و هم‌چنین معادله دیفرانسیل حرکت را **گسسته‌سازی** [۸] کردیم.

نکته‌ای که باید به آن توجّه کنیم این است که در حل عددی پاسخ $f(x,u,t)$ را **فقط و فقط** در زمان‌های t_i $(i = ۰, ۱, ۲, ..., n)$ به دست می‌آوریم و بین t_i ها هیچ مقداری برای $f(x,u,t)$ نداریم.

ایده اصلی روش حل "**آدامز-بشفورث**" [۹] از این‌جا به بعد مطرح می‌گردد.

حالا که گسسته‌سازی تکمیل شده است بایستی پاسخ معادله دیفرانسیل سیستم پیوسته را به طور تقریبی به دست آوریم(به یاد بیاورید که در حل عددی پاسخ فقط در نقاط نمونه برداری موجود است).

اوّلین تقریب این است که توزیع پاسخ را بین دو نقطه دلخواه α و β به صورت **خطّی** (تقریب مرتبه اوّل) فرض می‌کند. معادله خط تقریب را هم به صورت زیر می‌گیرد:

$$f(x,u,t) - f(t_{n-۱}) = k_۱(t - t_{n-۱}); \qquad (۳)$$

حالا برای این‌که ثابت مجهول $k_۱$ را پیدا کنیم، از یک نقطه قبل‌تر از $f_{n-۱}$ استفاده می‌شود و مختصات آن نقطه را در معادله خط مذکور جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(t_{n-۲}) - f(t_{n-۱}) = k_۱(t - t_{n-۱}) \Longrightarrow k_۱ = \left(\frac{f_{n-۲} - f_{n-۱}}{t_{n-۲} - t_{n-۱}}\right) \qquad (۴)$$

حالا که $k_۱$ را پیدا کردیم در معادله ؟؟ جای‌گذاری می‌شود و به دست می‌آید:

$$f(x,u,t) = f(t_{n-۱}) + \left(\frac{f_{n-۲} - f_{n-۱}}{t_{n-۲} - t_{n-۱}}\right)(t - t_{n-۱}); \qquad (۵)$$

حالا بایستی با رجوع به معادله اصلی ؟؟ به انتگرال‌گیری تابع گسسته‌سازی شده در بازه گسسته‌سازی بپردازیم:

$$\int_{t_{n-۱}}^{t_n} \dot{x}dt = \int_{t_{n-۱}}^{t_n} f(x,u,t)dt \Longrightarrow x(t_n) = x(t_{n-۱}) + (۱/۵\Delta t)f_{n-۱} - (۰/۵\Delta t)f_{n-۲} \qquad (۶)$$

و یا می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x_{[n]} = x_{[n-۱]} + (۱/۵\Delta t)f_{[n-۱]} - (۰/۵\Delta t)f_{[n-۲]} \qquad (۷)$$

و در نهایت یک رابطه بازگشتی [۱۰] برای حل معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x,u,t)$ پیدا کردیم.

رابطه بازگشتی با مرتبه تقریب سهموی نیز به طریق مشابه به دست می‌آید:

$$x_{[n]} = x_{[n-۱]} + (\frac{۲۳}{۱۲}\Delta t)f_{[n-۱]} - (\frac{۴}{۳}\Delta t)f_{[n-۲]} + (\frac{۵}{۱۲}\Delta t)f_{[n-۳]} \qquad (۸)$$

---

[۸] *Discretization*
[۹] *Adams-Bashforth Method*
[۱۰] *Recursive Relation*

در ادامه رابطه بازگشتی برای تقریب مرتبه ۳ نیز آورده شده است. هم‌چنین برای حل‌های عددی پیشرو نیز معادلات بازگشتی آورده شده است.

$$x_n = x_{n-1} + \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n-j}; \quad f_i = f(t_i, x_i)$$

Adams-Bashforth

$k=1: \ x_n = x_{n-1} + f_{n-1}\, h$

$k=2: \ x_n = x_{n-1} + (3f_{n-1} - f_{n-2})\, \frac{h}{2}$

$k=3: \ x_n = x_{n-1} + (23f_{n-1} - 16f_{n-2} + 5f_{n-3})\, \frac{h}{12}$

$k=4: \ x_n = x_{n-1} + (55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4})\, \frac{h}{24}$

Adams-Moulton

$k=0: \ x_n = x_{n-1} + f_n\, h$

$k=1: \ x_n = x_{n-1} + (f_n + f_{n-1})\, \frac{h}{2}$

$k=2: \ x_n = x_{n-1} + (5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2})\, \frac{h}{12}$

$k=3: \ x_n = x_{n-1} + (9f_n + 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3})\, \frac{h}{24}$

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی به روش رانج-کوتا [۱۱]

دوباره معادله دیفرانسیل ؟؟ را در نظر می‌گیریم. توجّه شود که فرم انتگرالی این رابطه به صورت زیر قابل استخراج است:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{۹}$$

اگر مقدار انتگرال رابطه بالا را با حاصل‌ضرب **طول بازه زمانی** در **مقدار تابع انتگرالده** [۱۲] **در مرکز بازه زمانی** برابر قرار دهیم؛ آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \Delta t \times f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \tag{۱۰}$$

امّا مشکل این‌جاست که مقدار $x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)$ معلوم نیست. به هر حال، می‌توان آن را به روش حل عددی اویلر [۱۳] تقریب بزنیم، یعنی بنویسیم:

$$x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) = x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n) \tag{۱۱}$$

حالا با ترکیب دو رابطه ؟؟ و ؟؟ می‌توان نوشت:

$$\left\{\begin{array}{lcl} k_1 &=& f(t_n, x_n) \\ k_2 &=& f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + k_1\frac{\Delta t}{2}\right) \\ x_{n+1} &=& x_n + k_2\Delta t \end{array}\right. \tag{۱۲}$$

یعنی برای تکمیل حل عددی در هر گام زمانی نیاز به محاسبه ۲ پارامتر k_1 و k_2 داریم.

برای محاسبه پاسخ عددی معادلات از روش رانج-کوتا با مرتبه ۴ که از جمله دقیق‌ترین و مهم‌ترین روش‌های مرسوم می‌باشد، از دستورالعمل زیر استفاده می‌شود:

$$\left\{\begin{array}{lcl} k_1 &=& f(t_n, x_n) \\ k_2 &=& f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + k_1\frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 &=& f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + k_2\frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 &=& f\left(t_n + \Delta t, x_n + k_3\Delta t\right) \\ x_{n+1} &=& x_n + \frac{1}{6}\Delta t(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \end{array}\right. \tag{۱۳}$$

---

[۱۱] *Runge-Kutta*
[۱۲] *Integrand*
[۱۳] *Euler Numerical Method*

برای مثال معادله دیفرانسیل به صورت زیر را داریم:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 sin(\omega t) \qquad (۱۴)$$

ابتدا بایستی فرم فضای حالت آن را بیابیم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F_0 sin(\omega t) \end{cases} \qquad (۱۵)$$

کد مربوطه و پاسخ متغیّرهای حالت و مسیر حرکت $(Trajectory)$ به روش رانج-کوتا در ادامه می‌آید:

```
clear all;
close all;
clc;

%% TIME DOMAIN DISCRETIZATION
t0 = 0;
tf = 10;
dT = 0.01;
t = t0:dT:tf;
N  = ceil((tf-t0)/dT);

%% PARAMETER DEFINITION
m  = 1;
k  = 100;
c  = 10;
F0 = 10;
omega = 2;

%% INITIAL VALUE DEFINITION
x1(1) = 0;
x2(1) = 0;

%% SOLVING EQUATIONS USING RUNGE-KUTTA#4
for i = 1:N

    k1x1 = dT*(x2(i));
    k1x2 = dT*(-k/m*x1(i)-c/m*x2(i)+F0/m*sin(omega*t(1,i)));

    k2x1 = dT*(x2(i)+k1x2/2);
    k2x2 = dT*(-k/m*(x1(i)+k1x1/2)-c/m*(x2(i)+k1x2/2)+F0/m*sin(omega*(t(1,i)+dT/2)));

    k3x1 = dT*(x2(i)+k2x2/2);
    k3x2 = dT*(-k/m*(x1(i)+k2x1/2)-c/m*(x2(i)+k2x2/2)+F0/m*sin(omega*(t(1,i)+dT/2)));

    k4x1 = dT*(x2(i)+k3x2);
    k4x2 = dT*(-k/m*(x1(i)+k3x1)-c/m*(x2(i)+k3x2)+F0/m*sin(omega*(t(1,i)+dT)));

    x1(i+1) = x1(i) + 1/6*(k1x1+2*(k2x1+k3x1)+k4x1);
    x2(i+1) = x2(i) + 1/6*(k1x2+2*(k2x2+k3x2)+k4x2);
end
%% SIMULATION PLOTS AND FIGURES
figure (1)
plot (t,x1,t,x2,'linewidth',2)
grid on
box on
xlabel('Time<Sec>')
ylabel('x_1(t) and x_2(t)')
title('Numerical Solution for the States of the system: x_!(t) and x_2(t)')
legend ('x_1(t)','x_2(t)')
figure (2)
plot (x1,x2,'linewidth',2)
grid on
```

```
box on
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
title('Phase Plane Figure : x_1-x_2')
legend ('Trajectory')
```