بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکدهٔ مهندسی مکانیک

پاسخ امتحان میان‌ترم درس کنترل پیشرفته ۱

نیمسال اوّل　　　کتاب و جزوه بسته　　　آبان‌ماه ۱۳۹۶

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه (دو ساعت)

نام و نام خانوادگی: ...حمید رحمانی...　　　شماره دانشجویی: ....

سوال	۱	۲	۳	٤	مرتب‌نویسی	جمع
بارم	۶	۶	۶	۶	۱	۲۵
نمره						

موفق باشید

☺☺☺

پاسخ مساله شماره ۱

پاسخ قسمت الف:

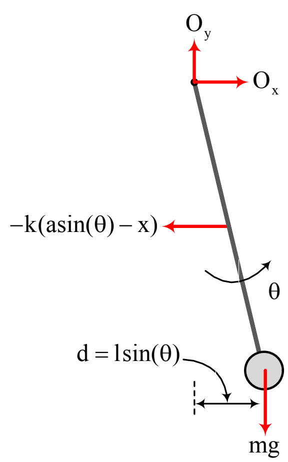
توجه داریم که متغیرهای حالت سیستم عبارتند از:

$$\vec{X}_{3\times1}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}=[\theta(t)\quad\dot{\theta}(t)\quad x(t)]^T \tag{۱-۱}$$

با توجه به تعریف متغیرهای حالت سیستم به صورت رابطه (۱-۱), خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}(t)\\\ddot{\theta}(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}\Longrightarrow\quad\dot{\vec{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\\ddot{\theta}(t)\\u(t)\end{bmatrix} \tag{۲-۱}$$

همان طور که در رابطه فوق ملاحظه می‌شود؛ برای محاسبه مشتق مرتبه اول متغیر حالت دوم یعنی: $\dot{x}_2$ در رابطه فضای حالت, نیاز داریم که گشتاور سیستم را حول محور گذرنده از لولا محاسبه کنیم. برای این منظور دیاگرام آزاد نیروهای وارده بر سیستم را مطابق شکل (۱-۱) ترسیم کرده و داریم:



شکل ۱-۱. دیاگرام آزاد نیروهای وارده بر سیستم.

$$\sum M_O=I_O\alpha\quad\rightarrow\quad J\ddot{\theta}=[-mg\times d-k(a\sin(\theta)-x)\times a] \tag{۳-۱}$$

که با ساده‌سازی کردن رابطه فوق داریم:

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{J}[-(mgl+ka^2)\sin(\theta)+kax] \tag{۴-۱}$$

و در نتیجه داریم:

$$\dot{x}_2=\ddot{\theta}=-\frac{mgl+ka^2}{J}\sin(\theta)+\frac{ka}{J}x\quad\Longrightarrow$$
$$\dot{x}_2=-\frac{mgl+ka^2}{J}\sin(x_1)+\frac{ka}{J}x_3 \tag{۵-۱}$$

و لذا فضای حالت این سیستم غیرخطی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\-\frac{mgl+ka^2}{l}\sin(x_1)+\frac{ka}{J}x_3\\u(t)\end{bmatrix} \tag{۶-۱}$$

که برای خطی‌سازی رابطه (۶-۱), از ماتریس ژاکوبین استفاده کرده و داریم:

$$J(0,0,u_{eq}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{x_{eq}=(0,0,u_{eq})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{mgl+ka^2}{J} & 0 & \frac{ka}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱-۷)$$

و لذا معادلات فضای حالت سیستم خطی عبارت است از:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{mgl+ka^2}{J} & 0 & \frac{ka}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y = [1 \quad 0 \quad 0]x \end{cases} \qquad (۱-۸)$$

پاسخ قسمت ب:

برای محاسبه تابع تبدیل سیستم از رابطه $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$ استفاده می‌شود: (توجه داریم که رابطه مستقیم بین زاویه خروجی $y = \theta$ و سرعت ورودی $u = \dot{x}$ نداریم و لذا $D = 0$ است)

$$G(s) = [1 \quad 0 \quad 0]\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{mgl+ka^2}{J} & 0 & \frac{ka}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۱-۹)$$

برای ساده‌سازی رابطه فوق, ابتدا به محاسبه $(sI-A)^{-1}$ می‌پردازیم:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{det(sI-A)} Adj(sI-A) \qquad (۱-۱۰)$$

و داریم:

$$\det(sI-A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{mgl+ka^2}{J} & s & -\frac{ka}{J} \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = s \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{mgl+ka^2}{J} & s \end{vmatrix} = s\left(s^2 + \frac{mgl+ka^2}{J}\right) \qquad (۱-۱۱)$$

نکته: با توجه به فرم ماتریس $C = [1 \quad 0 \quad 0]$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ که به ترتیب از سمت چپ و راست در ماتریس $(sI-A)^{-1}$ ضرب خواهند شد, فقط کافی است که درایه 1×3 در ماتریس الحاقی $(sI-A)$ را محاسبه کنیم و نیازی به محاسبه بقیه درایه‌ها ندارد.

اینجا برای این که جنبه آموزشی دارد, تمام درایه‌های ماتریس الحاقی محاسبه شده‌اند:

$$Adj(sI-A) = \begin{bmatrix} +s^2 & -\frac{mgl+ka^2}{J}s & 0 \\ +s & +s^2 & 0 \\ +\frac{ka}{J} & +\frac{ka}{J}s & s^2 + \frac{mgl+ka^2}{J} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s^2 & s & \frac{ka}{J} \\ -\frac{mgl+ka^2}{J}s & s^2 & \frac{ka}{J}s \\ 0 & 0 & s^2 + \frac{mgl+ka^2}{J} \end{bmatrix} \qquad (۱-۱۲)$$

و در نهایت؛ تابع تبدیل بین ورودی و خروجی سیستم عبارت است از:

$$G(s) = \frac{[1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} s^2 & s & \frac{ka}{J} \\ -\frac{mgl+ka^2}{J}s & s^2 & \frac{ka}{J}s \\ 0 & 0 & s^2+\frac{mgl+ka^2}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s\left(s^2+\frac{mgl+ka^2}{J}\right)} = \frac{\frac{ka}{J}}{s\left(s^2+\frac{mgl+ka^2}{J}\right)} = \frac{ka}{s(Js^2+mgl+ka^2)} \qquad (۱-۱۳)$$

پاسخ مساله شماره ۲

پاسخ قسمت الف:

با توجه به تابع تبدیل $G(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{s+3}{(s+2)^2+9}$, این سیستم دارای ۳ قطب در مکان‌های $p_1=-3$ و $p_{2,3}=-2\pm 3j$ است. لذا بایستی ماتریس A حاصل از تحقق فضای حالت برای تابع تبدیل داده‌شده, دارای ۳ مقدار ویژه $\lambda=\{-3,-2\pm 3j\}$ باشد.

توجه داریم که هر دو ماتریس A پیشنهادی به صورت بلوکی هستند و یکی از مقادیر ویژه‌شان برابر $\lambda_1=-3$ است. برای محاسبه دو مقدار ویژه دیگر, باید ماتریس‌های کاهش‌یافته A_d را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$A_{d1}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix} \quad A_{d2}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix} \tag{۱-۲}$$

حالا به بررسی مقادیر ویژه این ماتریس‌های جدید A_{d1} و A_{d2} می‌پردازیم:

$$\det(\lambda I-A_{d1})=0 \implies \begin{vmatrix}\lambda+2 & -3\\ +3 & \lambda+2\end{vmatrix}=0 \to (\lambda+2)^2+9=0 \implies \lambda_{d1_{2,3}}=\{-2\pm 3j\}$$

$$\det(\lambda I-A_{d2})=0 \implies \begin{vmatrix}\lambda+3 & -2\\ +2 & \lambda+2\end{vmatrix}=0 \to \lambda^2+5\lambda+10=0 \implies \lambda_{d2_{2,3}}=\left\{-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}j\right\}$$

لذا بدیهی است که ماتریس مناسب A برای تحقق فضای حالت از تابع تبدیل $G(s)$ داده شده, عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ -3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \tag{۲-۲}$$

پاسخ قسمت ب:

از آن‌جایی که سیستم دارای سه مقدار ویژه متمایز است, لذا مودهای رفتاری آن عبارتند از: $modes=\{e^{\lambda_i t}\}$. لذا برای این سیستم, مودهای رفتاری آن عبارتند از: $modes:\{e^{-3t},e^{-2t}\sin(3t),e^{-2t}\cos(3t)\}$.

پاسخ قسمت ج:

فضای حالت بلوکی سیستم را به صورت رابطه زیر می‌توان نمایش داد:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \cdots\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & \vdots & 0\\ -3 & -2 & \vdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \vdots & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_3\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \vdots & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_3\end{bmatrix}+[D]u(t)\end{cases} \tag{۳-۲}$$

با توجه به تابع تبدیل $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+3}+\frac{s+3}{(s+2)^2+9}$, ملاحظه می‌شود که رابطه زیر برقرار است:

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=\frac{X_3(s)}{U(s)}+G_2(s) \tag{۴-۲}$$

توجه داریم که $G_1(s)=\frac{1}{s+3}$ بوده و $G_2(s)=\frac{s+3}{(s+2)^2+9}$ است. و معادله سوم فضای حالت به صورت زیر است:

$$\begin{matrix}\dot{x}_3=-3x_3+b_3u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+c_3x_3\end{matrix} \implies G_1(s)=\frac{b_3c_3}{s+3} \to \boldsymbol{b_3=1, c_3=3} \tag{۵-۲}$$

توجه شود که انتخاب b_3 و c_3 در رابطه فوق کاملاً دلخواهی بوده و تنها بایستی شرط $b_3c_3=1$ ارضاء شود.

حالا در ادامه فقط یک سیستم رسته ۲ با معادلات فضای حالت به صورت زیر باقی مانده است:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad (۶-۲)$$

در ادامه با کمک رابطه $G_2(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2+9} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, خواهیم داشت:

$$G_2(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2+9} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b_1 c_1 + b_2 c_2 = 1} \\ \boldsymbol{2(b_1 c_1 + b_2 c_2) + 3(b_2 c_1 - b_1 c_2) = 3} \end{cases} \qquad (۷-۲)$$

حالا بایستی مقادیر ضرایب b_i و c_i $(i = 1,2)$ را به دلخواه و به گونه‌ای انتخاب کرد که رابطه دو معادله با دو مجهول غیرخطی حاصله از رابطه (۲-۷) فوق, همواره صادق باشد. مثلاً یکی از بی‌نهایت انتخاب به صورت زیر می‌تواند باشد:

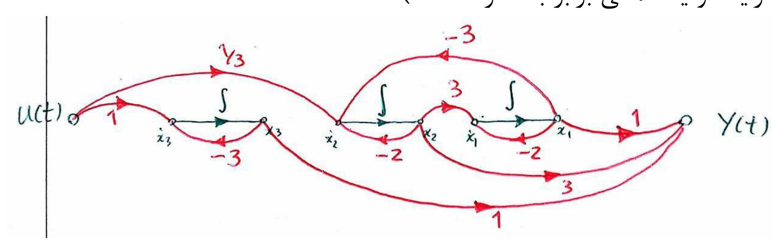
$$\begin{matrix} \boldsymbol{b_1 = 0} & \boldsymbol{b_2 = \frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{c_1 = 1} & \boldsymbol{c_2 = 3} \end{matrix} \qquad (۸-۲)$$

و لذا داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad (۹-۲)$$

پاسخ قسمت د:

برای ترسیم دیاگرام جریانی سیستم از معادلات فضای حالت (۲-۹) استفاده می‌کنیم. دیاگرام جریانی سیستم در شکل (۲-۱) ترسیم شده است. (فرضاً شرایط اولیه همگی برابر با صفر هستند)



شکل ۲-۱. دیاگرام جریانی برای سیستم با معادلات فضای حالت رابطه (۲-۹).

پاسخ مساله شماره ۳

پاسخ قسمت الف:

مقادیر ویژه:

برای محاسبه مقادیر ویژه از رابطه $\det(\lambda I - A) = 0$ استفاده می‌شود. با توجه به این که ماتریس A برابر $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -9 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ است, خواهیم داشت:

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -9 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \implies \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -4 & 0 \\ +9 & \lambda + 6 & 0 \\ -4 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{۱-۳}$$

که با حل معادله فوق, سه مقدار ویژه تکراری به صورت $\lambda_i = \{0,0,0\}$ داریم.

بردارهای ویژه:

ابتدا رتبه ماتریس $(\lambda_i I - A)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$rank\{\lambda_i I - A\} = rank\{0 \times I - A\} = rank\{-A\} = rank\left\{\begin{bmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}\right\} = 2 = n - \alpha \tag{۲-۳}$$

توجه داریم که در رابطه فوق, $n = 3$ برابر مرتبه ماتریس A بوده و لذا داریم: $\alpha = 1$. در نتیجه تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_i = 0$, α تا است. لذا دو بردار ویژه تعمیم‌یافته خواهیم داشت.

هم‌چنین توجه داریم که در این حالت, تعداد $\alpha = 1$ بلوک جردن متناظر با مقدار ویژه $\lambda_i = 0$ در ماتریس A شبه-قطری خواهیم داشت.

ابتدا همان $\alpha = 1$ بردار ویژه مستقل را می‌یابیم:

$$[0 \times I - A]_{3\times3} \begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \\ V_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \\ V_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies V^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۳-۳}$$

بردار ویژه تعمیم‌یافته اول ($\xi^{(31)}$) از رابطه زیر پیدا می‌شود:

$$[0 \times I - A]_{3\times3} \begin{bmatrix} \xi_1^{(31)} \\ \xi_2^{(31)} \\ \xi_3^{(31)} \end{bmatrix} = -V^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \xi^{(31)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۴-۳}$$

و بردار ویژه تعمیم‌یافته دوم ($\xi^{(32)}$) از رابطه زیر پیدا می‌شود:

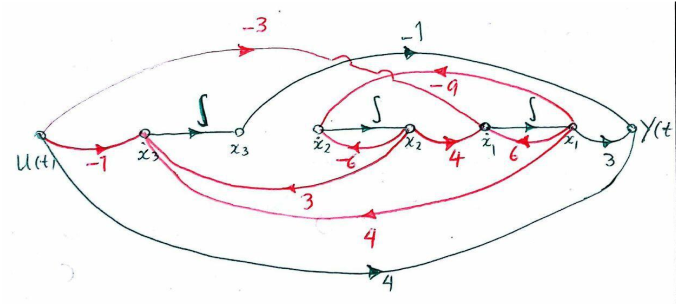
$$[0 \times I - A]_{3\times3} \begin{bmatrix} \xi_1^{(32)} \\ \xi_2^{(32)} \\ \xi_3^{(32)} \end{bmatrix} = -\xi^{(31)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \xi^{(32)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۵-۳}$$

دیاگرام جریانی:

برای ترسیم دیاگرام جریانی سیستم از معادلات فضای حالت آن استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 + 4x_2 - 3u(t) \\ \dot{x}_2 = -9x_1 - 6x_2 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 + 3x_2 - u(t) \\ y(t) = 3x_1 - x_3 + 4u(t) \end{cases} \tag{۶-۳}$$

دیاگرام جریانی سیستم در شکل (۳-۱) ترسیم شده است. (فرضاً شرایط اولیه همگی برابر با صفر هستند)



شکل ۳-۱. دیاگرام جریانی برای سیستم با معادلات فضای حالت رابطه (۳-۶).

پاسخ قسمت ب:

ابتدا A، B، C و D را از معادله فضای حالت (۳-۶) به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 6x_1 + 4x_2 - 3u(t)\\ \dot{x}_2 = -9x_1 - 6x_2\\ \dot{x}_3 = 4x_1 + 3x_2 - u(t)\\ y(t) = 3x_1 - x_3 + 4u(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = \begin{bmatrix}6 & 4 & 0\\ -9 & -6 & 0\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\\ C = \begin{bmatrix}3 & 0 & -1\end{bmatrix} & D = [4]\end{matrix} \qquad (۳-۷)$$

حالا برای محاسبه تابع تبدیل از رابطه $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ استفاده می‌کنیم و داریم: (توجه داریم که ماتریس D مخالف صفر است)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left\{\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\end{bmatrix}\left(s\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & 4 & 0\\ -9 & -6 & 0\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + 4\right\} \qquad (۳-۸)$$

در ادامه ابتدا $(sI-A)^{-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)}Adj(sI-A) \qquad (۳-۹)$$

که در آن داریم:

$$\det(sI-A) = \begin{vmatrix}s-6 & -4 & 0\\ 9 & s+6 & 0\\ -4 & -3 & s\end{vmatrix} = s\begin{vmatrix}s-6 & -4\\ 9 & s+6\end{vmatrix} = s(s^2 - 36 + 36) = s^3 \qquad (۳-۱۰)$$

و

$$Adj\begin{bmatrix}s-6 & -4 & 0\\ 9 & s+6 & 0\\ -4 & -3 & s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s(s+6) & -9s & 4s-3\\ +4s & s(s-6) & 3s-2\\ 0 & 0 & s^2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}s(s+6) & 4s & 0\\ -9s & s(s-6) & 0\\ 4s-3 & 3s-2 & s^2\end{bmatrix} \qquad (۳-۱۱)$$

و در نتیجه:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^3}\begin{bmatrix}s(s+6) & 4s & 0\\ -9s & s(s-6) & 0\\ 4s-3 & 3s-2 & s^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{s+6}{s^2} & \frac{4}{s^2} & 0\\ -\frac{9}{s^2} & \frac{s-6}{s^2} & 0\\ \frac{4s-3}{s^3} & \frac{3s-2}{s^3} & \frac{1}{s}\end{bmatrix} \qquad (۳-۱۲)$$

و لذا تابع تبدیل $G(s)$ عبارت است از:

$$G(s) = \left\{\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+6}{s^2} & \frac{4}{s^2} & 0\\ -\frac{9}{s^2} & \frac{s-6}{s^2} & 0\\ \frac{4s-3}{s^3} & \frac{3s-2}{s^3} & \frac{1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + 4\right\} = \begin{bmatrix}\frac{3s+18}{s^2} - \frac{4s-3}{s^3} & \frac{12}{s^2} - \frac{3s-2}{s^3} & \frac{-1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + 4 \qquad (۳-۱۳)$$

و با ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$G(s)=\left\{\frac{-9s-5\ 4}{s^2}+\frac{12s-9}{s^3}+\frac{1}{s}\right\}+4=\frac{-9s^2-5\ 4s+12s-9+s^2}{s^3}+4=\frac{-8s^2-42s-9}{s^3}+4 \quad (۱۴-۳)$$

یا:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{4s^3-8s^2-42s-9}{s^3} \quad (۱۵-۳)$$

پاسخ قسمت ج:

ابتدا توجه داریم که در فرم کانونیکال کنترل‌پذیر, تحقق ماتریس‌های سیستم عبارتند از:

تحقق فرم کانونیکال کنترل‌پذیر:

فرم تابع تبدیل و فرم تحقق کنترل‌پذیر:

$$G(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \Rightarrow \begin{cases} A_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_c=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_c=[b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1} \quad] \quad D_c=[D] \end{cases}$$

لذا برای سیستم داده شده با فضای حالت (۳-۷) داریم:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{4s^3-8s^2-42s-9}{s^3} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \quad a_1=0 \quad a_2=0 \\ b_0=-9 \quad b_1=-42 \quad b_3=-8 \end{cases} \quad (۱۶-۳)$$

$$\begin{gathered} A_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_c=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_c=[-9 \quad -42 \quad -8] \quad D=4 \end{gathered} \quad (۱۷-۳)$$

و یا:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=[-9 \quad -42 \quad -8]x+[4]u(t) \end{cases} \quad (۱۸-۳)$$

پاسخ مساله شماره ٤

پاسخ قسمت الف:

با توجه به این که دو تابع تبدیل $G_1(z)=\frac{X_1(z)}{U(z)}$ و $G_2(z)=\frac{X_2(z)}{U(z)}$ داریم, لذا می‌توان دو ورودی به صورت $y_1(k)=x_1(k)$ و $y_2(k)=x_2(k)$ را در نظر گرفت و لذا داریم:

$$\begin{matrix} y_1(k)=x_1(k) \\ y_2(k)=x_2(k) \end{matrix} \implies Y_{2\times1}(k)=\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k)\end{bmatrix} \to Y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k)\end{bmatrix} \tag{۱-۴}$$

و ماتریس C عبارت است از:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{۲-۴}$$

حالا با کمک رابطه $G_{2\times1}(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$, توابع تبدیل $G_1(z)$ و $G_2(z)$ به دست می‌آیند: (توجه کنید که ماتریس D برابر صفر است)

$$G_{2\times1}(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left(z\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} \tag{۳-۴}$$

در ادامه؛ ابتدا به محاسبه $(zI-A)^{-1}$ می‌پردازیم:

$$(zI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}z-p_{22} & +p_{12}\\ +p_{21} & z-p_{11}\end{bmatrix} \tag{۴-۴}$$

و لذا داریم:

$$G_{2\times1}(z)=\begin{bmatrix}G_{11}(z)\\ G_{21}(z)\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-p_{22} & +p_{12}\\ +p_{21} & z-p_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{vmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}q_1(z-p_{22})+q_2p_{12}\\ q_2(z-p_{11})+q_1p_{21}\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}\frac{q_1(z-p_{22})+q_2p_{12}}{\begin{vmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{vmatrix}}\\ \frac{q_2(z-p_{11})+q_1p_{21}}{\begin{vmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{vmatrix}}\end{bmatrix} \tag{۵-۴}$$

که با ساده‌سازی رابطه (۴-۵) داریم:

$$G_1(z)=\frac{X_1(z)}{U(z)}=G_{11}(z)=\frac{q_1(z-p_{22})+q_2p_{12}}{\begin{vmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{vmatrix}}=\frac{q_1z+(q_2p_{12}-q_1p_{22})}{(z-p_{11})(z-p_{22})-p_{12}p_{21}}=\frac{q_1z+(q_2p_{12}-q_1p_{22})}{z^2-(p_{11}+p_{22})z+(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})} \tag{۶-۴}$$

$$G_2(z)=\frac{X_2(z)}{U(z)}=G_{21}(z)=\frac{q_2(z-p_{11})+q_1p_{21}}{\begin{vmatrix}z-p_{11} & -p_{12}\\ -p_{21} & z-p_{22}\end{vmatrix}}=\frac{q_2z+(q_1p_{21}-q_2p_{11})}{(z-p_{11})(z-p_{22})-p_{12}p_{21}}=\frac{q_2z+(q_1p_{21}-q_2p_{11})}{z^2-(p_{11}+p_{22})z+(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})} \tag{۷-۴}$$

پاسخ قسمت ب:

معادله فضای حالت این سیستم زمان گسسته (بدون ورودی) عبارت است از:

$$X_{2\times1}(k+1)=\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} \tag{۸-۴}$$

همچنین شرایط اولیه سیستم به صورت $X(0)=X_0=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ داده شده است.

می‌دانیم پاسخ یک سیستم زمان گسسته با معادلات فضای حالت $X(k+1)=PX(k)$ و شرایط اولیه X_0, عبارت است از: (بدون ورودی)

$$X(k)=\Phi(k)X_0 \tag{۹-۴}$$

که در آن $\Phi(k)$ ماتریس انتقال حالت زمان گسسته می‌باشد. لذا ابتدا به محاسبه این ماتریس می‌پردازیم:

$$\Phi(k)=Z^{-1}\{(zI-P)^{-1}z\}=Z^{-1}\left\{\left(z\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1}z\right\}=Z^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix}z+1 & -1\\ 0 & z+1\end{bmatrix}\right)^{-1}z\right\} \tag{۱۰-۴}$$

و پس از ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$\Phi(k)=Z^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}z+1 & +1\\ 0 & z+1\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}z+1 & -1\\ 0 & z+1\end{vmatrix}}z\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}z(z+1) & z\\ 0 & z(z+1)\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}z+1 & -1\\ 0 & z+1\end{vmatrix}}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}z(z+1) & z\\ 0 & z(z+1)\end{bmatrix}}{(z+1)^2}\right\}=Z^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{z}{z+1} & \frac{z}{(z+1)^2}\\ 0 & \frac{z}{z+1}\end{bmatrix}\right\} \tag{۱۱-۴}$$

و یا داریم:

$$\Phi(k) = Z^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{z}{z+1} & \frac{z}{(z+1)^2} \\ 0 & \frac{z}{z+1} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\} & Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z+1)^2}\right\} \\ 0 & Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\} \end{bmatrix} \tag{۱۲-۴}$$

در ادامه برای سادگی محاسبه معکوس تبدیل z از روش مانده‌ها استفاده کرده و داریم:

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z+1)^2}\right\} = Residue\left\{\frac{z}{(z+1)^2} \times z^{k-1}\right\} = Residue\left\{\frac{z^k}{(z+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -1} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left\{(z+1)^2 \frac{z^k}{(z+1)^2}\right\} \Rightarrow$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z+1)^2}\right\} = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\{z^k\} = \lim_{z\to -1} kz^k = k(-1)^k \tag{۱۳-۴}$$

و هم‌چنین داریم:

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\} = Residue\left\{\frac{z}{z+1} \times z^{k-1}\right\} = Residue\left\{\frac{z^k}{z+1}\right\} = \lim_{z\to -1}\left\{(z+1)\frac{z^k}{(z+1)}\right\} \Rightarrow$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\} = \lim_{z\to -1} z^k = (-1)^k \tag{۱۴-۴}$$

و لذا ماتریس انتقال حالت زمان گسسته $\Phi(k)$ عبارت است از:

$$\Phi(k) = Z^{-1}\{(zI-P)^{-1}z\} = \begin{bmatrix} (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \tag{۱۵-۴}$$

و در نهایت پاسخ بردار حالت سیستم زمان گسسته برابر است با:

$$X(k) = \Phi(k)X_0 = \begin{bmatrix} (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(-1)^k \\ (-1)^k \end{bmatrix} \tag{۱۶-۴}$$