دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

Prof. Ali Ghaffari

Advanced Control Systems (I)

Solutions ExtraQ#01

School of Mechanical Engineering
Dynamics and Control
2017-2018

TA: Hamid Rahmanei

نیازی به تحویل دادن جواب این تمرین‌ها نمی‌باشد.

پاسخ سوال شماره یک

به کمک قضیّه مقدار نهایی می‌خواهیم پاسخ حالت پایدار را در صورت وجود بیابیم. برای این منظور بایستی تابع تبدیل سیستم کنترلی را پیدا کنیم و سپس از رابطه $y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$ استفاده کنیم. قبل از آن توجّه شود که اگر مخرج تابع تبدیل دارای قطب موهومی محض باشد ($p_i = j\omega_n$), نمی‌توان از قضیّه مقدار نهایی استفاده کرد.

$$G(s) = C_{2\times2}(sI_{2\times2} - A_{2\times2})^{-1}B_{2\times1} \implies G_{2\times1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ +3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۱-۱)$$

پس از انجام محاسبات لازم، تابع تبدیل بین ورودی و خروجی(های) سیستم به دست می‌آید:

$$G(s) = \frac{1}{s^2+6s+8} \begin{bmatrix} s+1 & +1 \\ -3 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ s+5 \end{bmatrix}}{s^2+6s+8} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+6s+8} \\ \frac{s+5}{s^2+6s+8} \end{bmatrix} \qquad (۲-۱)$$

و در نتیجه با توجّه به این‌که شرط لازم برای استفاده از قضیه مقدار نهایی برقرار است (قطب موهومی محض نداریم), می‌توانیم بنویسیم:

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \quad \implies \quad y_{ss} = \lim_{s\to 0} s\{G(s)U(s)\} = \lim_{s\to 0} \begin{bmatrix} \frac{s}{s(s^2+6s+8)} \\ \frac{s(s+5)}{s(s^2+6s+8)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} \qquad (۳-۱)$$

پاسخ سوال شماره دو

ابتدا برای هر کدام از ظرف‌های پنج‌گانه, با استفاده از قانون پایستگی جرم, معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتفاع مخازن را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\big(A_1x_1(t)\big) = 0 - \frac{x_1}{R}; \\ \frac{d}{dt}\big(A_2x_2(t)\big) = u(t) - \frac{x_2}{R} - \frac{x_2-x_3}{R}; \\ \frac{d}{dt}\big(A_3x_3(t)\big) = +\frac{x_1}{R} - \frac{x_3}{R} + \frac{x_2-x_3}{R}; \\ \frac{d}{dt}\big(A_4x_4(t)\big) = +\frac{x_3}{R} - \frac{x_4}{R}; \\ \frac{d}{dt}\big(A_5x_5(t)\big) = +\frac{x_2}{R} - \frac{x_5}{R}; \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1; \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 + u(t); \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 2x_3; \\ \dot{x}_4 = x_3 - x_4; \\ \dot{x}_5 = x_2 - x_5; \end{cases} \qquad (۱-۲)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رسته معادلات دیفرانسیل سیستم برابر ۵ است. حال که فرم فضای حالت را برای این سیستم پیدا کرده‌ایم, می‌توانیم تابع تبدیل آن را بیابیم:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & s+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow G(s) = \frac{-(s+1)^2(s+2)}{(s+3)(s+1)^4} = \frac{-s-2}{(s+3)(s^2+2s+1)} \qquad (۲-۲)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود, رسته تابع تبدیل این سیستم برابر با ۳ است و این یعنی دو تا از مودهای سیستم که می‌دانیم وجود دارند, با صفرهای صورت تابع تبدیل ساده‌سازی شده‌اند (***Zero-Pole Cancellation***) و در نتیجه این سیستم دارای ۲ مود پنهان به صورت زیر است:

$$Hiden\ Modes: \quad e^{-t} \quad , \quad te^{-t} \tag{۲-۳}$$