نیازی به تحویل دادن جواب این تمرین‌ها نمی‌باشد.

پاسخ سوال شماره یک

پاسخ الف:

برای یافتن پاسخ سیستم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$y(t)=Cx(t)=C\left\{\phi(t)x(0)+\int_0^t[\phi(t-\tau)Bu(\tau)]d\tau\right\} \tag{۱-۱}$$

با توجّه به این‌که شرایط اوّلیه سیستم برابر صفر است, در نتیجه داریم:

$$y(t)=C\int_0^t[\phi(t-\tau)Bu(\tau)]d\tau=[0\quad 1]\begin{bmatrix}\phi_{11}(t) & \phi_{12}(t)\\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t)\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}\phi_{11}(-\tau) & \phi_{12}(-\tau)\\ \phi_{21}(-\tau) & \phi_{22(-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\delta(\tau)d\tau\Longrightarrow \tag{۲-۱}$$

و پس از ساده سازی رابطه بالا داریم:

$$y(t)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}\phi_{11}(t) & \phi_{12}(t)\\ \phi_{21}(t) & \phi\_22(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}(0)+\phi_{12}(0)\\ \phi_{21}(0)+\phi_{22}(0)\end{bmatrix} \tag{۳-۱}$$

> **نکته:** توجّه شود که برای انجام محاسبات بالا از خاصیّت تابع ضربه استفاده شده است. امّا برای تکمیل محاسبات بالا نیاز است که ماتریس انتقال حالت سیستم را بیابیم.

در ادامه؛ درایه‌های ماتریس انتقال حالت سیستم محاسبه می‌شوند:

$$\phi(t)=e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ -1 & s-2\end{bmatrix}^{-1}\right\}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3} & e^{2t}\end{bmatrix} \tag{۴-۱}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$y(t)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3} & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+0\\ 0+1\end{bmatrix}=\frac{4e^{2t}-e^{-t}}{3} \tag{۵-۱}$$

پاسخ ب:

پاسخ به شرط اوّلیه, برای حالت بدون ورودی, از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$y(t)=Cx(t)=C\phi(t)x(0)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3} & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=e^{2t}\left(x_2(0)+\frac{x_1(0)}{3}\right)+e^{-t}\left(-\frac{x_1(0)}{3}\right) \tag{۶-۱}$$

برای یافتن شرایط اوّلیه‌ای که برای سیستم بدون ورودی, با پاسخ قسمت (الف) برابر باشد, داریم:

$$\frac{4e^{2t}-e^{-t}}{3}=e^{2t}\left(x_2(0)+\frac{x_1(0)}{3}\right)+e^{-t}\left(-\frac{x_1(0)}{3}\right)\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{۷-۱}$$

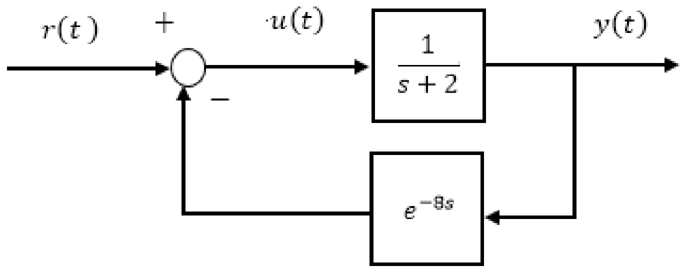
پاسخ سوال شماره دو

پاسخ الف:

با نوشتن رابطه پایستگی جرم برای مخزن مذکور داریم:

$$\frac{d}{dt}\big(Ax(t)\big) = +u(t) - \frac{x(t)}{R_2} - \frac{x(t)}{R_1} \;\;\Longrightarrow\;\; \dot{x} = -2x + u(t) \qquad (۱-۲)$$

از آن‌جایی که سیستم دارای تاخیر سیستم اندازه‌گیری (سنسور) است درنتیجه در مدار فیدبک بایستی یک تابع تبدیل برابر با $H(s) = \mathrm{e}^{-8s}$ قرار دهیم و داریم:



شکل ۲-۱.

پاسخ ب:

تابع تبدیل بین ورودی و خروجی سیستم مدار بسته را نیز می‌توان به صورت زیر پیدا کرد:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1+\frac{e^{-8s}}{s+2}} = \frac{1}{s+2+e^{-8s}} \qquad (۲-۲)$$

پاسخ سوال شماره سه

تابع تبدیل مدار بسته سیستم را پیدا می‌کنیم:

$$Y(s) = U(s) + U(s)\left(\frac{s-1}{1+s^2}\right) + Y(s)\left(\frac{s+2}{2+s^3}\right); \Longrightarrow \qquad (۱-۳)$$

که پس از ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$Y(s)\left[1-\left(\frac{s+2}{2+s^3}\right)\right] = U(s)\left[1+\left(\frac{s-1}{1+s^2}\right)\right];\; \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(2+s^3)(s+1)}{(s^2-1)s(s^2+1)} = \frac{s^3+2}{(s-1)(s^2+1)} \qquad (۲-۳)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود, مودهای پنهان سیستم برابر اند با: $Hiden\ Modes\colon \{e^{0}, e^{-t}\}$.