نیازی به تحویل دادن جواب این تمرین‌ها نمی‌باشد.

پاسخ سوال شماره یک

پاسخ سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y(t) = Cx(t) = C\left\{e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right\} \quad (۱-۱)$$

با توجّه به این‌که شرایط اوّلیه سیستم برابر صفر است, در نتیجه فقط پاسخ به ورودی پلّه‌ای واحد را پیدا می‌کنیم:

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (۲-۱)$$

امّا قبل از آن بایستی درایه‌های ماتریس انتقال حالت را برای این سیستم محاسبه کنیم:

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & -0.5\\+1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+0.5}\begin{bmatrix}s & -0.5\\1 & s+1\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow$$

که با ساده‌سازی آن داریم:

$$e^{At} = \begin{bmatrix}e^{-\frac{t}{2}}(\cos(0.5t) - \sin(0.5t)) & e^{-\frac{t}{2}}\sin(0.5t)\\ 2e^{-\frac{t}{2}}\sin(0.5t) & e^{-\frac{t}{2}}(\cos(0.5t)+\sin(0.5t))\end{bmatrix} \quad (۳-۱)$$

نکته: می‌توان نشان داد که با فرض این‌که, ورودی سیستم یک ورودی پلّه‌ای واحد است که در زمان صفر اتّفاق می‌افتد, رابطه زیر صادق است:

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = C\{A^{-1}(e^{At} - I)B\} \quad (۴-۱)$$

و در نتیجه داریم:

$$y(t) = C\{A^{-1}(e^{At} - I)B\} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}(\cos(0.5t) - \sin(0.5t)) - 0.5\\ e^{-\frac{t}{2}}\sin(0.5t)\end{bmatrix} \quad (۵-۱)$$

و پس از ساده‌سازی آن داریم:

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(0.5t)\,; \quad (۶-۱)$$

پاسخ سوال شماره دو

پاسخ الف:

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\0 & \lambda & -1\\-27 & 27 & \lambda - 9\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^3 = 0; \quad (۱-۲)$$

که ریشه‌های معادله فوق (مقادیر ویژه سیستم) برابرند با:

$$\lambda_{1,2,3} = \{-3,-3,-3\}; \tag{۲-۲}$$

چون معادله مشخّصه از رسته ۳ است، پس باقیمانده حداکثر از رسته ۲ است:

$$e^{At} = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2; \tag{۳-۲}$$

و با جای‌گذاری مقادیر ویژه سیستم در رابطه بالا داریم:

$$e^{3t} = a_0 + 3a_1 + 9a_2; (\star) \tag{۴-۲}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(e^{\lambda t}\right)_{\lambda=3} = \frac{d}{d\lambda}\left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2\right)_{\lambda=3} \Longrightarrow te^{3t} = a_1 + 6a_2; (\star\star) \tag{۵-۲}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\left(e^{\lambda t}\right)_{\lambda=3} = \frac{d^2}{d\lambda^2}\left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2\right)_{\lambda=3} \Longrightarrow t^2e^{3t} = 2a_2; (\star\star\star) \tag{۶-۲}$$

و در نتیجه داریم:

$$e^{At} = \left(1 - 3t + \frac{9}{2}t^2\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + t(1-3t)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 27 & -27 & 9\end{bmatrix} + \left(\frac{t^2}{2}e^{3t}\right)\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 27 & -27 & 9\\ 243 & -216 & 64\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 - 3t + \frac{9}{2}t^2 & t(1-3t) & \frac{t^2}{2}\\ \frac{27t^2}{2} & 1 - 3t - 9t^2 & t\left(1 + \frac{3}{2}t\right)\\ 9t\left(3 + \frac{9}{2}t^2\right) & -27t(1+t) & 1 + 6t + \frac{9}{2}t^2\end{bmatrix} \times e^{3t} \tag{۷-۲}$$

پاسخ ب:

طبق قضیّه کیلی-همیلتون, هر ماتریس مانند A در رابطه معادله مشخّصه خودش صدق می‌کند:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \tag{۸-۲}$$

از آن‌جایی که ماتریس A در معادله مشخصه خودش صدق می‌کند (طبق قضیه کیلی-همیلتون)، لذا داریم:

$$A^2 + 3A + 2I = \bar{0}; \tag{۹-۲}$$

و با ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$\rightarrow A^2 = -3A - 2I;$$

$$\rightarrow A^3 = 7A + 6I;$$

$$\rightarrow A^4 = -15A - 14I;$$

$$\rightarrow A^5 = 31A + 30I;$$

و با تکرار این روابط به یک رابطه به صورت زیر می‌رسیم:

$$A^k = -(-1)^k\{(2^k - 1)A + (2^k - 2)I\}; \tag{۱۰-۲}$$

پاسخ سوال شماره سه

پاسخ الف:

دبی عبوری از مقاومت خطّی R را برابر $q = \frac{Adx}{dt}$ می‌گیریم و داریم:

$$\frac{p - p^\star}{R} = q = A\frac{dx}{dt} \Longrightarrow p^\star = p(t) - RA\dot{x}(t) \tag{۱-۳}$$

حال با به کار بردن قانون نیوتن داریم:

$$\sum F_x = ma_x \Longrightarrow p^{\star}A - kx = m\ddot{x}(t)\ ; \tag{۲-۳}$$

برای محاسبه تابع تبدیل از رابطه بالا تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$ms^2X(s) + kX(s) = \big(P(s) - RAsX(s)\big)A \Longrightarrow X(s)(ms^2 + RA^2s + k) = AP(s) \tag{۳-۳}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{A}{ms^2+RA^2s+k} \tag{۴-۳}$$

پاسخ ب:

با تعریف متغیّرهای حالت به صورت $x_1 \approx x(t)$ و $x_2 \approx \dot{x}(t)$ داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{RA^2}{m}x_2 + \frac{A}{m}p(t)\ \ ; \\ y(t) = x_1(t); \end{cases} \tag{۵-۳}$$

که در آن ماتریس‌های سیستم به فرم فضای حالت، عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{RA^2}{m} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A}{m} \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \tag{۶-۳}$$

پاسخ ج:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\Delta(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\times 1\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{A}{m}}{\left(s+\frac{RA^2}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\left(\frac{RA^2}{2m}\right)^2\right)}\right\} \Longrightarrow \tag{۷-۳}$$

$$y(t) = \frac{A}{m\left(\frac{k}{m}-\left(\frac{RA^2}{2m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{RA^2}{2m}t}\sin\left(\left(\frac{k}{m}-\left(\frac{RA^2}{2m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}t\right); \tag{۸-۳}$$

پاسخ سوال شماره چهار:

پاسخ ب:

$$\begin{cases} A\frac{dh_1}{dt} = +u(t) - \frac{h_1}{R} - \frac{h_1-h_2}{R} \\ A\frac{dh_2}{dt} = -\frac{h_2}{R} + \frac{h_1-h_2}{R}; \\ y(t) = Q_3 = \frac{h_1-h_2}{R}; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u(t); \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1; \\ y(t) = x_1 - x_2; \end{cases} \tag{۱-۴}$$

که در آن ماتریس‌های سیستم در فرم فضای حالت، عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{۲-۴}$$

پاسخ الف:

برای محاسبه $G(s)$ داریم:

$$G(s) = \frac{Q_3(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \tag{۳-۴}$$

که با ساده‌سازی آن حاصل می‌شود:

$$G(s)=\frac{[1\quad -1]}{(s+2)^2-1}\begin{bmatrix} s+2 & 1\\ 1 & s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{s+3} \tag{۴-۴}$$

پاسخ ج:

برای محاسبه پاسخ به شرایط اوّلیه صفر و ورودی پلّه‌ای واحد از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{s}-\frac{1}{3}\frac{1}{s+3}\right\}=\frac{1}{3}(1-e^{-3t}); \tag{۵-۴}$$

پاسخ د:

ابتدا ماتریس انتقال حالت را محاسبه می‌کنیم:

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)}\\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\end{bmatrix}\right\}\Rightarrow \tag{۶-۴}$$

که پس از بسط به کسرهای جزئی و گرفتن تبدیل معکوس لاپلاس خواهیم داشت:

$$e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t}\end{bmatrix}; \tag{۷-۴}$$

ابتدا پاسخ بدون شرایط اوّلیه به ورودی را به دست می‌آوریم:

$$y_{zs}(t)=C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau=[1\quad -1]\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t}\end{bmatrix}\int_0^t\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{\tau}+e^{3\tau} & e^{-\tau}-e^{3\tau}\\ e^{\tau}-e^{3\tau} & e^{\tau}+e^{3\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(\tau)\,d\tau \tag{۸-۴}$$

$$y_{zs}(t)=e^{-3t}$$

در ادامه پاسخ بدون ورودی به شرایط اوّلیه را هم محاسبه می‌کنیم:

$$y_{zi}(t)=Ce^{At}X(0)=[1\quad -1]\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}\Rightarrow \tag{۹-۴}$$

$$y_{zs}(t)=e^{-3t}\left(x_{1(0)}-x\_2(0)\right);$$

و درنهایت بررسی می‌کنیم, آیا شرایط اوّلیه‌ای موجود است که پاسخ بدون ورودی به آن, برابر پاسخ قسمت (پ) باشد یا نه؟

$$y_{zs}(t)=y_{zi}(t)\Rightarrow e^{-3t}\left(x_{1(0)}-x_{2(0)}\right)=e^{-3t}\Rightarrow x_{1(0)}-x_2(0)=1 \tag{۱۰-۴}$$

و می‌توان نتیجه گرفت که اگر شرایط اوّلیه بر روی خط $x_{1(0)}-x_2(0)=1$ شروع شوند, آن‌گاه شرط خواسته شده برقرار است.