نیازی به تحویل دادن جواب این تمرین‌ها نمی‌باشد.

پاسخ سوال شماره یک

پاسخ قسمت الف:

برای این‌که پاسخ سیستم همگرا باشد, بایستی یا همه مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی منفی باشند و یا شرایط اولیه به گونه‌ای انتخاب شوند که مود ناپایدار (یا مود دارای قسمت حقیقی مثبت) دارای ضریب صفر شده و لذا در پاسخ ظاهر نشود. پس ابتدا باید پاسخ سیستم بدون ورودی را به شرایط اولیه دلخواه $X_0=[x_{10} \quad x_{20} \quad x_{30}]^T$ بیابیم.

$$y(t)=Ce^{At}X_0=CL^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}X_0 \tag{۱-۱}$$

ابتدا به محاسبه ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ می‌پردازیم:

ماتریس انتقال حالت:

برای محاسبه ماتریس انتقال حالت سیستم داریم:

$$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -2 \\ 0 & 0 & s-\beta \end{bmatrix}^{-1}\right\}=L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)(s-\beta)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{2}{(s+2)(s-\beta)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\beta} \end{bmatrix} \tag{۲-۱}$$

که با محاسبه معکوس لاپلاس فوق خواهیم داشت:

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t} & \left(\frac{-2}{\beta+1}\right)e^{-t}+\left(\frac{2}{\beta+2}\right)e^{-2t}+\left(\frac{2}{(\beta+1)(\beta+2)}\right)e^{\beta t} \\ 0 & e^{-2t} & \left(\frac{2}{\beta+2}\right)(e^{\beta t}-e^{-2t}) \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix} \tag{۳-۱}$$

پس از محاسبه ماتریس انتقال حالت مطابق رابطه (۱-۳), در ادامه پاسخ سیستم را محاسبه می‌کنیم.

پاسخ سیستم:

که عبارت است از:

$$y(t)=CL^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}X_0=[\alpha \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t} & \left(\frac{-2}{\beta+1}\right)e^{-t}+\left(\frac{2}{\beta+2}\right)e^{-2t}+\left(\frac{2}{(\beta+1)(\beta+2)}\right)e^{\beta t} \\ 0 & e^{-2t} & \left(\frac{2}{\beta+2}\right)(e^{\beta t}-e^{-2t}) \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \tag{۴-۱}$$

با توجه به رابطه فوق؛ بدیهی است که اگر $x_{30}=0$ باشد, آن‌گاه هیچ مضربی از مود ناپایدار $e^{\beta t}=e^{+3t}$ در پاسخ $y(t)$ سیستم ظاهر نمی‌شود. لذا شرایط اولیه مناسب برای این کار به صورت زیر است:

$$Initial\ Condition:\ \ X_0=\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ 0 \end{bmatrix},\ \ where\ x_{10}\ and\ x_{20}\ are\ arbitrary\ real\ constants. \tag{۵-۱}$$

پاسخ قسمت ب:

فرض می‌شود که در این قسمت شرایط اولیه نداریم ($X_0 = \vec{0}_{3\times1}$) و فقط ورودی پله $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ به سیستم اعمال می‌شود. لذا پاسخ سیستم عبارت است از:

$$y(t) = C\left\{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau\right\} \tag{۶-۱}$$

لذا این بار باید پس از محاسبه انتگرال کانولوشن فوق, ضریب مربوط به مود e^{-3t} ظاهر شده در پاسخ سیستم را برابر صفر قرار دهیم. لذا خواهیم داشت:

$$y(t) = [\alpha \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t} & \left(\frac{-2}{\beta+1}\right)e^{-t} + \left(\frac{2}{\beta+2}\right)e^{-2t} + \left(\frac{2}{(\beta+1)(\beta+2)}\right)e^{\beta t} \\ 0 & e^{-2t} & \left(\frac{2}{\beta+2}\right)\left(e^{\beta t} - e^{-2t}\right) \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau} & e^{\tau}-e^{2\tau} & \left(\frac{-2}{\beta+1}\right)e^{\tau} + \left(\frac{2}{\beta+2}\right)e^{2\tau} + \left(\frac{2}{(\beta+1)(\beta+2)}\right)e^{-\beta\tau} \\ 0 & e^{2\tau} & \left(\frac{2}{\beta+2}\right)\left(e^{-\beta\tau} - e^{2\tau}\right) \\ 0 & 0 & e^{-\beta\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \tag{۷-۱}$$

که پس از ساده‌سازی رابطه فوق و محاسبه پاسخ $y(t)$, ضریب مود e^{-3t} در پاسخ برابر $1 + \frac{2}{\beta+2} + \frac{2\alpha}{(\beta+1)(\beta+2)}$ می‌شود که باید برابر صفر قرار دهیم:

$$1 + \frac{2}{\beta+2} + \frac{2\alpha}{(\beta+1)(\beta+2)} = 0 \implies \frac{2\alpha}{(\beta+1)(\beta+2)} = -1 - \frac{2}{\beta+2} \rightarrow \alpha = -\frac{(\beta+1)(\beta+4)}{2} = 1 \tag{۸-۱}$$

پاسخ سوال شماره دو

برای محاسبه پاسخ $y(t)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$y(t) = C\left\{\Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\right\} \tag{۱-۲}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود, ابتدا بایستی ماتریس انتقال حالت را محاسبه کنیم:

ماتریس انتقال حالت:

داریم:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}}{(s-1)^2}\right\} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix} \tag{۲-۲}$$

و پاسخ سیستم عبارت خواهد بود از:

$$y(t) = C\left\{\Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\right\} = [1 \quad 1]\left\{\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & 0 \\ (t-\tau)e^{t-\tau} & e^{t-\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau\right\} \tag{۳-۲}$$

با ساده‌سازی رابطه فوق خواهیم داشت:

$$y(t) = [1 \quad 1]\left\{\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} \\ (t-\tau+1)e^{t-\tau} \end{bmatrix} d\tau\right\} = [1 \quad 1]\left\{\begin{bmatrix} e^t \\ (t+1)e^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t e^{t-\tau}d\tau \\ \int_0^t (t-\tau+1)e^{t-\tau}d\tau \end{bmatrix}\right\} \tag{۴-۲}$$

که داریم:

$$y(t) = [1 \quad 1]\left\{\begin{bmatrix} e^t \\ (t+1)e^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ -t(1+e^t) \end{bmatrix}\right\} = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2e^t - 1 \\ e^t - t \end{bmatrix} = 3e^t - t - 1 \tag{۵-۲}$$

پاسخ سوال شماره سه

می‌دانیم پاسخ سیستم دینامیکی نامتغیّر با زمان (LTI) در حالت بدون ورودی ($u=0$) به شرایط اوّلیه دلخواه x_0 از رابطه:

$$y_{1\times1}(t)=\underbrace{[C]_{1\times2}[e^{At}]_{2\times2}}_{=\psi_{1\times2}}[x_0]_{2\times1}=[\psi_{1\times2}][x_0]_{2\times1} \tag{۳-۱}$$

پیدا می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{if}\ \ x_0=\begin{bmatrix}1\\0/5\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \ y(t)=[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}1\\0/5\end{bmatrix}=e^{-t}-0/5e^{-2t} \\ \text{if}\ \ x_0=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \ y(t)=[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=0/5e^{-t}-e^{-2t}\end{array}\right.\ \Rightarrow \begin{cases}\psi_{11}+0/5\psi_{12}=e^{-t}-0/5e^{-2t}\\ -\psi_{11}+\psi_{12}=0/5e^{-t}-e^{-2t}\end{cases} \tag{۳-۲}$$

با حل دستگاه معادلات (۳-۲) فوق, مجهول‌های ψ_{11} و ψ_{12} به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix}1 & 0/5\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}-0/5e^{-2t}\\ 0/5e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0/5\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-t}-0/5e^{-2t}\\ 0/5e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}= \tag{۳-۳}$$

و داریم: $\psi_{11}=0/5e^{-t}$ و $\psi_{12}=e^{-t}-e^{-2t}$.

حالا برای یافتن خواسته سوال (؟) داریم:

$$\text{if}\ \ x_0=\begin{bmatrix}2\\0/5\end{bmatrix}\Rightarrow y(t)=[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}2\\0/5\end{bmatrix}=2\psi_{11}+0/5\psi_{12}=2(0/5e^{-t})+0/5(e^{-t}-e^{-2t})\ \Rightarrow$$

$$?=y(t)=1/5e^{-t}-0/5e^{-2t} \tag{۳-۴}$$

پاسخ سوال شماره چهار:

می‌دانیم پاسخ سیستم دینامیکی نامتغیّر با زمان (LTI) با ورودی پلّه‌ای واحد ($u=1$) به شرایط اوّلیه دلخواه x_0 از رابطه:

$$y_{1\times1}(t)=\underbrace{[C]_{1\times2}[e^{At}]_{2\times2}}_{=\psi_{1\times2}}[x_0]_{2\times1}+\underbrace{[C]_{1\times2}[e^{At}]_{2\times2}}_{=\psi_{1\times2}}\underbrace{\int_0^t e^{-A\tau}B\underbrace{u(\tau)}_{=1}d\tau}_{=\Psi_{2\times1}}+Du(\tau) \tag{۴-۱}$$

پیدا می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\begin{array}{l}\text{if}\ \ x_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\ \ y(t)=[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}\Psi_{11}\\ \Psi_{21}\end{bmatrix}+D=0/5-0/5e^{-t}+e^{-2t}\quad (*)\\ \text{if}\ \ x_0=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\ \ y(t)=[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}\Psi_{11}\\ \Psi_{21}\end{bmatrix}+D=0/5-e^{-t}+1/5e^{-2t}\quad (**)\end{array} \tag{۴-۲}$$

حال برای محاسبه خواسته سوال (؟), توجّه داریم که:

$$\text{if}\ \ x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow y(t)=[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}\Psi_{11}\\ \Psi_{21}\end{bmatrix}+D=[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}\Psi_{11}\\ \Psi_{21}\end{bmatrix}+D \tag{۴-۳}$$

در نتیجه کافی است که عبارت (*) را در (۲-) ضرب نموده و با عبارت (**) جمع کنیم تا خواسته سوال به دست آید:

$$-2\times(*)+(**):\ -[\psi_{11}\quad \psi_{12}]\begin{bmatrix}\Psi_{11}\\ \Psi_{21}\end{bmatrix}-D=-0/5(1+e^{-2t})\ \Rightarrow\ ?=y(t)=\frac{(1+e^{-2t})}{2} \tag{۴-۴}$$