نیازی به تحویل دادن جواب این تمرین‌ها نمی‌باشد.

پاسخ سوال شماره یک

پاسخ قسمت الف:

برای پیدا کردن معادلات فضای حالت سیستم گسسته‌سازی‌شده, از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$A_d = e^{AT}; \quad B_d = \int_0^T e^{A\xi}Bd\xi \ ; \quad C_d = C; \tag{۱-۱}$$

امّا قبل از انجام محاسبات مذکور بایستی ماتریس انتقال حالت را پیدا کنیم, برای این منظور از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s\end{bmatrix}^{-1}\right\} \tag{۲-۱}$$

و پس از بسط به کسرهای جزئی برای عبارت بالا داریم:

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ 3e^{-3t}-3e^{-t} & 3e^{-3t}-e^{-t}\end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A_d = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-T}-e^{-3T} & e^{-T}-e^{-3T} \\ 3e^{-3T}-3e^{-T} & 3e^{-3T}-e^{-T}\end{bmatrix}; \quad T: time\ increment \tag{۳-۱}$$

$$B_d = \int_0^T \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-\xi}-e^{-3\xi} & e^{-\xi}-e^{-3\xi} \\ 3e^{-3\xi}-3e^{-\xi} & 3e^{-3\xi}-e^{-\xi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}d\xi \Longrightarrow B_d = \begin{bmatrix} 2-2.5e^{-T}+0.5e^{-3T} \\ -1+2.5e^{-T}-1.5e^{-3T}\end{bmatrix}; \tag{۴-۱}$$

$$C_d = C = [1 \quad 1] \tag{۵-۱}$$

پاسخ قسمت ب:

برای اجتناب از محاسبات بسیار طولانی و پیچیده که اگر از روش $G(z) = C_d(zI-A_d)^{-1}B_d$ استفاده کنیم با آن مواجه خواهیم شد؛ به جای آن از فرمول زیر استفاده خواهیم نمود:

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} \tag{۶-۱}$$

برای استفاده از فرمول بالا بایستی ابتدا تابع تبدیل سیستم زمان پیوسته را پیدا کنیم:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{[1 \quad 1]}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{3}{s+3} \tag{۷-۱}$$

و در نتیجه برای محاسبه تابع تبدیل میدان Z خواهیم داشت:

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+3)}\right\}\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right\}\right] \tag{۸-۱}$$

و پس از محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[1-e^{-3t}] = (1-z^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\{1-e^{-3jT}\}z^{-j} \Longrightarrow$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\left(\sum_{j=0}^{\infty} 1 \times z^{-j} - \sum_{j=0}^{\infty} e^{-3jT} \times z^{-j}\right) = (1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-3T}z^{-1}}\right) \qquad (۹-۱)$$

و با ساده‌سازی کردن رابطه بالا داریم:

$$G(z) = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-eT}} = \frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}} \qquad (۱۰-۱)$$

پاسخ قسمت ج:

برای محاسبه تابع تبدیل سیستم مدار بسته, با توجّه به این‌که در مدار فیدبک تابع تبدیلی نداریم ($H(s) = 1$) در نتیجه می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$G_{closed-loop}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}}{1+\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}} = \frac{1-e^{-3T}}{z+1-2e^{-3T}} \qquad (۱۱-۱)$$

پاسخ قسمت د:

ابتدا بایستی تبدیل Z ورودی سیستم را بیابیم:

$$R(z) = \sum_{j=0}^{\infty} 1 \times z^{-j} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (۱۲-۱)$$

حال با جای‌گذاری رابطه بالا در تابع تبدیل سیستم مدار بسته داریم:

$$Y(z) = G_{closed-loop}(z) \times R(z) = \frac{(1-e^{-3T})z}{z^2-2e^{-3T}z+(-1+2e^{-3T})}; \qquad (۱۳-۱)$$

حال توجّه داریم که $y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ است و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-3T})z}{z^2-2e^{-3T}z+(-1+2e^{-3T})}\right\} \qquad (۱۴-۱)$$

مثلاً اگر بخواهیم از روش بسط به کسرهای جزئی پاسخ را بیابیم:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{(1-e^{-3T})}{z^2-2e^{-3T}z+(-1+2e^{-3T})} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{z-(2e^{-3T}-1)}; \qquad (۱۵-۱)$$

و در نتیجه داریم:

$$Y(z) = \frac{1}{2}.\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}.\frac{z}{z-(2e^{-3T}-1)} \Longrightarrow y(k) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-(2e^{-3T}-1)}\right\}\right) \qquad (۱۶-۱)$$

و پس از ساده‌سازی عبارت بالا پاسخ سیستم گسسته به ورودی پلّه واحد, به دست می‌آید:

$$y(k) = \frac{1}{2} \times 1[k] - \frac{1}{2}(2e^{-3T} - 1)^k; \quad k = 0,1,2,3,4, \dots \qquad (۱۷-۱)$$

برای محاسبه پاسخ حالت ماندگار نیز حد بی‌نهایت پاسخ را محاسبه می‌کنیم:

$$y_{ss} = \lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2} \times 1[k] - \frac{1}{2}(2e^{-3T} - 1)^k\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(|\dots| < 1)^k = \frac{1}{2} - 0 = 0.5 \qquad (۱۸-۱)$$

پاسخ قسمت ه:

به کمک قضیه مقدار نهایی داریم:

$$y_{ss} = \lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1}) \times \frac{(1-e^{-3T})z}{z^2-2e^{-3T}z+(-1+2e^{-3T})} \qquad (۱۹-۱)$$

$$y_{ss} = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1}) \times \frac{(1-e^{-3T})z}{z^2-2e^{-3T}z+(-1+2e^{-3T})} = \lim_{z\to 1}\frac{\frac{z-1}{z}(1-e^{-3T})z}{(z-1)(z+1-2e^{-3T})} = \frac{(1-e^{-3T})}{(1+1-2e^{-3T})} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad (۲۰-۱)$$

پاسخ سوال شماره دو

پاسخ قسمت‌های الف:

از دو طرف معادله زمان گسسته مذکور تبدیل Z گرفته و داریم:

$$z^2X(z) - zx(1) - x(0) + \frac{5}{6}\big(zX(z) - x(0)\big) + \frac{1}{6}X(z) = U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{۲-۱}$$

که با ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$\left(z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)X(z) = zx(1) + \frac{1}{1-z^{-1}}; \rightarrow X(z) = \frac{zx(1)}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}} + \frac{1}{1-z^{-1}} \times \frac{1}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}} \tag{۲-۲}$$

و لذا خواهیم داشت:

$$X(z) = x(1)\left\{-\frac{1}{6}\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - 12\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}\right\} \tag{۲-۳}$$

حالا از طرفین رابطه فوق تبدیل معکوس گسسته z می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[x(1)\left\{-\frac{1}{6}\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}\right\}\right] + \mathcal{Z}^{-1}\left[\left\{\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - 12\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}\right\}\right] \tag{۲-۳}$$

که برابر است با:

$$x(k) = \frac{x(1)}{6}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\} + \frac{1}{2} - 12\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k; \quad (k = 0,1,2,3,4,\dots) \tag{۲-۴}$$

پاسخ قسمت ج:

بدون استفاده از قضیه مقدار نهایی و فقط با حل مستقیم و گرفتن حد بی‌نهایت پاسخ سیستم, پاسخ حالت نهایی برابر است با:

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{k\to\infty}\frac{x(1)}{6}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\} + \frac{1}{2} - 12\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2} = 0.5 \tag{۲-۵}$$

پاسخ قسمت د:

به کمک قضیه مقدار نهایی خواهیم داشت:

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to1}(1-z^{-1}) \times X(z) = \lim_{z\to1}(1-z^{-1}) \times \left[x(1)\left\{-\frac{1}{6}\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - 12\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}\right\}\right] = \tag{۲-۶}$$

و با ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$x(\infty) = x_{ss} = \lim_{z\to1}x(1)\left\{-\frac{1}{6}\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\frac{z-1}{z+\frac{1}{3}}\right\} + \lim_{z\to1}\left\{\frac{1}{2} - 12\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}\frac{z-1}{z+\frac{1}{3}}\right\} = 0 + \frac{1}{2} - 0 - 0 = \frac{1}{2} = 0.5 \tag{۲-۷}$$

پاسخ سوال شماره سه

پاسخ الف:

$$(s^2+\omega^2)Y(s) = \omega^2U(s) \quad \Longrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 u(t)$$

حالا با انتخاب متغیّرهای فضای حالت به صورت $x_1 \approx y(t), x_2 \approx \dot{y}(t)$ داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \omega x_2;\\ \dot{x}_2 = -\omega x_1 - \omega u(t);\\ y = x_1;\end{cases} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix}0\\ -\omega\end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]; \tag{۳-۱}$$

پاسخ قسمت ب:

$$A_d = \phi(T) = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+\omega^2} & \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ \frac{-\omega}{s^2+\omega^2} & \frac{s}{s^2+\omega^2} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{bmatrix} \quad (۳-۲)$$

$$B_d = \int_0^T \left(\begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) & \sin(\omega\tau) \\ -\sin(\omega\tau) & \cos(\omega\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \end{bmatrix}\right) d\tau = \begin{bmatrix} \cos(\omega T) - 1 \\ -\sin(\omega T) \end{bmatrix} \quad (۳-۳)$$

پاسخ قسمت ج:

$$G(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} z - \cos(\omega\tau) & -\sin(\omega\tau) \\ \sin(\omega\tau) & z - \cos(\omega\tau) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \cos(\omega T) - 1 \\ -\sin(\omega T) \end{bmatrix} \quad (۳-۴)$$

$$G(z) = \frac{[1 \quad 0]}{z^2 - 2\cos(\omega T)z + 1}\begin{bmatrix} z - \cos(\omega\tau) & +\sin(\omega\tau) \\ -\sin(\omega\tau) & z - \cos(\omega\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\omega T) - 1 \\ -\sin(\omega T) \end{bmatrix} \quad (۳-۵)$$

و پس از ساده‌سازی رابطه فوق داریم:

$$G(z) = \frac{(1 - \cos(\omega T))(1 + z)}{z^2 - 2\cos(\omega T)z + 1}; \quad (۳-۶)$$

پاسخ قسمت د:

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2} \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = 1 - \cos(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad (۳-۷)$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}(1 - \cos(\omega t)) = (1 - z^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}(1 - \cos(\omega jT)) \times z^{-j} \quad \Longrightarrow \quad (۳-۸)$$

$$G(z) = 1 - \frac{(z-1)(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2\cos(\omega T)z + 1} = \frac{(1 - \cos(\omega T))(1 + z)}{z^2 - 2\cos(\omega T)z + 1} \quad (۳-۹)$$