



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
Prof. Ali Ghaffari

## Advanced Control Systems (I)

School of Mechanical Engineering  
Dynamics and Control  
2017-2018

### Extra Questions #6

No need to hand-over this problems!

TA: Hamid Rahmani

نیازی به تحویل دادن جواب این تمرین‌ها نمی‌باشد.

### سوال شماره یک

معادلات دیفرانسیلی حاکم بر زوایای اولر یک ماهواره مخابراتی به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x(t) - (B - C)\omega_y(t)\omega_z(t) = \alpha_1 A\omega_x(t) \\ B\dot{\omega}_y(t) - (C - A)\omega_z(t)\omega_x(t) = \alpha_2 B\omega_y(t) \\ C\dot{\omega}_z(t) - (A - B)\omega_x(t)\omega_y(t) = \alpha_3 C\omega_z(t) \end{cases} \quad (1-1)$$

**الف:** با انتخاب متغیرهای حالت به صورت  $\omega_x \approx x_1$ ,  $\omega_y \approx x_2$  و  $\omega_z \approx x_3$  فرم فضای حالت معادلات سیستم را به دست آورید؟

**ب:** با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف، شرایط کافی به منظور پایداری سیستم را به دست آورید؟

### سوال شماره دو

سیستم پیوسته نامتغیر با زمان بدون ورودی از مرتبه  $n$  به صورت  $\dot{x} = Ax$  را در نظر بگیرید. تابع کاندیدای لیاپانوف  $V(\vec{x})$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$V(\vec{x}) = \vec{x}^T P \vec{x} \quad (1-2)$$

که در آن  $P$  ماتریس مثبت معین است و با تعیین مشتق لیاپانوف فوق، به شرط معادله لیاپانوف به صورت زیر می‌رسیم:

$$\dot{V}(\vec{x}) = \vec{x}^T (A^T P + PA) \vec{x} = -\vec{x}^T Q \vec{x} \quad (2-2)$$

**الف:** نشان دهید که سیستم پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\text{rank} \begin{Bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ Q^{\frac{1}{2}} A \\ Q^{\frac{1}{2}} A^2 \\ \vdots \\ Q^{\frac{1}{2}} A^{n-1} \end{Bmatrix} = n \quad (3-2)$$

**ب:** با استفاده از رابطه (الف)؛ پایداری مجانبی سیستم دینامیکی نامتغیر با زمان به صورت  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x$  را بررسی کنید؟

### سوال شماره سه

سیستم دینامیکی نامتغیر با زمان  $\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x$  را به صورت پارامتریک در نظر بگیرید.  $(a_{ij} \in R)$

شرایطی را برای پارامترهای  $a_{ij}$  تعیین کنید که سیستم فوق پایدار مجانبی باشد؟