پاسخ سوال شماره یک

پاسخ قسمت الف:

انرژی پتانسیل کل سیستم، T_{sys}:

با توجه به شکل، واضح است که ارابه به جرم m_1 در حین حرکت ارتعاشی خود، مقید به حرکت افقی در راستای x بوده و لذا هیچ‌گونه تغییر ارتفاعی نخواهد داشت. در نتیجه انرژی پتانسیل آن برابر صفر است.

انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر با ثابت k برابر است با:

$$U_s = \frac{1}{2}k(x-0)^2 = \frac{kx^2}{2} \qquad (۱-۱)$$

چون میله AB بدون جرم در نظر گرفته شده است، انرژی پتانسیل آن برابر صفر می‌شود.

هم‌چنین نقطه A از ارابه در حین حرکت ارتعاشی، هیچ تغییر ارتفاعی ندارد، لذا می‌توان گفت که مرکز جرم دیسک یکنواخت دارای انرژی پتانسیلی برابر با یک پاندول ساده است:

$$U_{disc} = m_2 g(R+r)(1-\cos\theta) \qquad (۲-۱)$$

و در نهایت، انرژی پتانسیل کل سیستم عبارت است از:

$$U_{sys} = \frac{kx^2}{2} + m_2 g(R+r)(1-\cos\theta) \qquad (۳-۱)$$

انرژی جنبشی کل سیستم، U_{sys}:

انرژی جنبشی ارابه برابر است با:

$$T_{cart} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} \qquad (۴-۱)$$

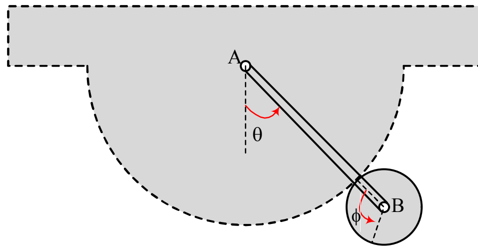
از آن‌جایی که فرض می‌شود فنر با ثابت k بدون جرم است، لذا انرژی جنبشی آن برابر با صفر است. هم‌چنین؛ با توجه به فرض بدون جرم بودن میله AB، انرژی جنبشی آن نیز برابر با صفر است.

می‌دانیم در حین حرکت ارتعاشی این سیستم، مرکز جرم دیسک هم دارای حرکت دورانی بوده و هم دارای حرکت خطی است، لذا انرژی جنبشی آن از دو قسمت تشکیل می‌شود:

$$T_{disc} = T_{disc}^{rotation} + T_{disc}^{translation} = \frac{1}{2}I_{CG}|\vec{\omega}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}|^2 \qquad (۵-۱)$$

انرژی جنبشی دورانی دیسک:

فرض می‌کنیم سرعت دورانی دیسک حول محل تماسش با ارابه برابر $\frac{d}{dt}\phi = \dot{\phi}$ باشد. به شکل (۱) توجه کنید.



شکل ۱. دوران دیسک بر روی سطح نیم‌دایروی ارابه به اندازه ϕ.

رابطه بین θ و ϕ :

با توجه به طول کمان پیموده‌شده توسط نقطه تماس دیسک با ارابه، داریم: (زاویه ϕ یک مختصات مستقل جدید نمی‌باشد!)

$$\begin{matrix}|arc| = r\phi \\ |arc| = R\theta\end{matrix} \implies R\theta = r\phi \rightarrow R\dot{\theta} = r\dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = \left(\frac{R}{r}\right)\dot{\theta} \qquad (۱-۶)$$

در نتیجه بردار سرعت دورانی مطلق دیسک، $\vec{\omega}$، برابر است با:

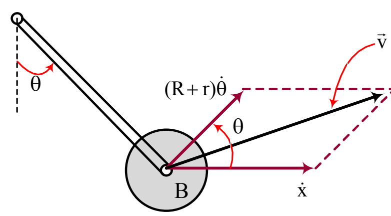
$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\phi}} = (\dot{\theta})\hat{k} + (\dot{\phi})\hat{k} = (\dot{\theta} + \dot{\phi})\hat{k} = \dot{\theta}\left(1 + \frac{R}{r}\right)\hat{k} \qquad (۱-۷)$$

و در نتیجه انرژی جنبشی دورانی دیسک عبارت است از:

$$T_{disc}^{rotation} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2 r^2\right)\left(\left|\dot{\theta}\left(1 + \frac{R}{r}\right)\hat{k}\right|\right)^2 = \frac{m_2}{4}\dot{\theta}^2(R + r)^2 \qquad (۱-۸)$$

انرژی جنبشی انتقالی دیسک:

سرعت خطی مطلق برای مرکز جرم دیسک را می‌توان به کمک رابطه سرعت نسبی به صورت رابطه (۱-۹) نوشت: به شکل (۲) توجه کنید.



شکل ۲. محاسبه بردار سرعت خطّی مطلق برای دیسک در حین حرکت ارتعاشی.

$$|\vec{v}|^2 = \dot{x}^2 + (R + r)^2\dot{\theta}^2 + 2(\dot{x})\left((R + r)\dot{\theta}\right)\cos(\theta) \qquad (۱-۹)$$

و در نتیجه انرژی جنبشی انتقالی دیسک عبارت است از:

$$T_{disc}^{Translation} = \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2 + (R + r)^2\dot{\theta}^2 + 2(R + r)\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta)\right] \qquad (۱-۱۰)$$

و در نهایت، انرژی جنبشی کل سیستم عبارت است از:

$$T_{sys} = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{4}(R + r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2}\left[\dot{x}^2 + (R + r)^2\dot{\theta}^2 + 2(R + r)\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta)\right] \qquad (۱-۱۱)$$

پاسخ قسمت ب:

برای محاسبه فرکانس‌ها و شکل مودها طبیعی هر سیستم n درجه آزادی ($n \geq 2$)؛ بایستی از رابطه (۱-۱۲) استفاده کنیم:

$$\det\{[K]-\omega^2[M]\}=0 \tag{۱۲-۱}$$

همان‌طور که به وضوح در رابطه فوق ملاحظه می‌شود، بایستی ابتدا ماتریس‌های جرم $[M]$ و فنریت $[K]$ سیستم n درجه آزادی را به دست آوریم. برای این منظور می‌توانیم:

۱- یا از ضرایب تاثیر نرمی و سفتی و ... استفاده کنیم،

۲- یا می‌توان انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سیستم را به فرم ماتریسی $T_{sys}=\frac{1}{2}\,\vec{\dot{q}}^T[M]\vec{\dot{q}}$ و $U_{sys}=\frac{1}{2}\,\vec{q}^T[K]\vec{q}$ نوشت.

۳- یا می‌توانیم ابتدا معادله حرکت سیستم را به دست آورده و سپس آن را خطی‌سازی کنیم و فرم ماتریسی معادلات حرکت خطی را بنویسیم.

مثلاً ما اینجا روش سوم را استفاده می‌کنیم.

برای نوشتن معادلات حرکت این سیستم؛ با توجه به این که انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن را در قسمت (**الف**) به دست آورده‌ایم، از روش انرژی لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا بایستی لاگرانژین سیستم را تشکیل دهیم:

$$L=T_{sys}-U_{sys}=\left\{\frac{m_1}{2}\dot{x}^2+\frac{m_2}{4}(R+r)^2\dot{\theta}^2+\frac{m_2}{2}\left[\dot{x}^2+(R+r)^2\dot{\theta}^2+2(R+r)\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta)\right]-\frac{kx^2}{2}-m_2g(R+r)(1-\cos\theta)\right\} \tag{۱۳-۱}$$

سپس از رابطه لاگرانژ برای هر دو مختصات تعمیم‌یافته $q_1\approx x$ و $q_2\approx\theta$ به طور جداگانه استفاده می‌کنیم تا به دو معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دو برسیم.

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right\}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad (i=1,2) \tag{۱۴-۱}$$

نکته: توجه شود که طرف سمت راست در رابطه لاگرانژ (۱-۱۴)، همواره برابر صفر نیست. علت صفر شدن آن برای این سیستم این است که کار نیروهای ناپایستار در این سیستم برابر صفر است و در ضمن هیچ تحریک خارجی به سیستم وارد نمی‌گردد.

برای مختصه x:

$$\frac{d}{dt}\{m_1\dot{x}+m_2\dot{x}+m_2(R+r)\dot{\theta}\cos(\theta)\}-\{-kx\}=0\ \Rightarrow$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2(R+r)\left[\ddot{\theta}\cos(\theta)-\dot{\theta}^2\sin(\theta)\right]+kx=0$$

که پس از ساده‌سازی و مرتب کردن رابطه فوق داریم:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+(m_2(R+r)\cos(\theta))\ddot{\theta}-m_2(R+r)\sin(\theta)\dot{\theta}^2+kx=0 \tag{۱۵-۱}$$

برای مختصه θ:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_2}{2}(R+r)^2\dot{\theta}+m_2(R+r)^2\dot{\theta}+m_2(R+r)\dot{x}\cos(\theta)\right\}-\{-m_2(R+r)\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)-m_2g(R+r)\sin(\theta)\}=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{m_2}{2}(R+r)^2\ddot{\theta}+m_2(R+r)^2\ddot{\theta}+m_2(R+r)[\ddot{x}\cos(\theta)-\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)]+m_2(R+r)\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)+m_2g(R+r)\sin(\theta)=0$$

که پس از ساده‌سازی و مرتب کردن رابطه فوق داریم:

$$(m_2(R+r)\cos(\theta))\ddot{x}+\left(\frac{3m_2(R+r)^2}{2}\right)\ddot{\theta}+m_2g(R+r)\sin(\theta)=0 \tag{۱۶-۱}$$

و در نتیجه دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطّی حاکم بر ارتعاشات سیستم دو درجه آزادی به صورت رابطه (۱-۱۷) به دست می‌آید:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}+(m_2(R+r)\cos(\theta))\ddot{\theta}-m_2(R+r)\sin(\theta)\dot{\theta}^2+kx=0\\ (m_2(R+r)\cos(\theta))\ddot{x}+\left(\frac{3m_2(R+r)^2}{2}\right)\ddot{\theta}+m_2g(R+r)\sin(\theta)=0\end{cases} \tag{۱۷-۱}$$

بدیهی است که دلیل غیرخطی بودن معادلات فوق، حضور جملات سینوس و کسینوس یکی از متغیرهای میدانی مسئله (یعنی: θ) و هم‌چنین جملات با توان بالا (مثلاً: $\dot{\theta}^2$) است.

حالا در ادامه برای خطی کردن معادلات (۱-۱۷)، فرض می‌شود که جابجایی‌های مختصات x و θ بسیار کوچک‌اند و حرکت خطی است. در این صورت $\sin(\theta) \approx \theta$ بوده و $\cos(\theta) \approx 1$ است. با این توضیحات داریم:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}+\big(m_2(R+r)\big)\ddot{\theta}+kx=0\\ \big(m_2(R+r)\big)\ddot{x}+\left(\frac{3m_2(R+r)^2}{2}\right)\ddot{\theta}+m_2g(R+r)\theta=0\end{cases} \tag{۱-۱۸}$$

حالا با تعریف بردار متغیرهای تعمیم‌یافته $\vec{q}=\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}$، فرم ماتریسی معادلات (۱-۱۸) عبارت است از:

$$\begin{bmatrix}m_1+m_2 & m_2(R+r)\\ m_2(R+r) & \frac{3m_2(R+r)^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & m_2g(R+r)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{۱-۱۹}$$

و لذا ماتریس‌های جرم و فنریت عبارتند از:

$$[M]=\begin{bmatrix}m_1+m_2 & m_2(R+r)\\ m_2(R+r) & \frac{3m_2(R+r)^2}{2}\end{bmatrix}\quad [K]=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & m_2g(R+r)\end{bmatrix} \tag{۱-۲۰}$$

فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها:

در ادامه برای ساده کردن محاسبات، فرض می‌شود که مقادیر پارامترهای این سیستم به صورت زیر باشند:

$$\begin{matrix}m_1=2kg & R=1m & g=10\frac{N}{kg}\\ m_2=0.5kg & r=0.2m & k=216\frac{N}{m}\end{matrix} \tag{۱-۲۱}$$

با در نظر گرفتن این مقادیر برای پارامترهای سیستم، ماتریس‌های جرم و فنریت که برای حل معادله فرکانسی (۱-۱۲) مورد نیاز هستند، عبارتند از:

$$[M]=\begin{bmatrix}2.5 & 0.6\\ 0.6 & 1.08\end{bmatrix}\quad [K]=\begin{bmatrix}216 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix} \tag{۱-۲۲}$$

و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\det\left\{\begin{bmatrix}216 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}2.5 & 0.6\\ 0.6 & 1.08\end{bmatrix}\right\}=\begin{vmatrix}216-2.5\omega^2 & -0.6\\ -0.6 & 6-1.08\omega^2\end{vmatrix}=0 \implies$$

$$2.7\omega^4-248.28\omega^2+1295.64=0 \implies \begin{cases}\omega_1^2=5.5539\\ \omega_2^2=86.4016\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\omega_1\approx 2.3567\frac{rad}{sec}\\ \omega_2\approx 9.2952\frac{rad}{sec}\end{cases} \tag{۱-۲۳}$$

در ادامه برای محاسبه شکل مودهای طبیعی داریم:

$$\{[K]-\omega_i^2[M]\}\begin{bmatrix}X_1^i\\ X_2^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{۱-۲۴}$$

که در آن $X^i=\begin{bmatrix}X_1^i\\ X_2^i\end{bmatrix}$ شکل مودهای طبیعی سیستم یا بردارهای ویژه آن هستند. و در نهایت، شکل مود طبیعی اول و دوم عبارتند از:

$$\begin{bmatrix}216-2.5\omega_1^2 & -0.6\\ -0.6 & 6-1.08\omega_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1^1\\ X_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix}202.1153 & -0.6\\ -0.6 & 0.0018\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1^1\\ X_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \implies$$

$$-0.6X_1^1+0.0018X_2^1=0 \implies \frac{X_2^1}{X_1^1}=\frac{0.6}{0.0018}=333.3333 \rightarrow X^1=\begin{bmatrix}1\\ 333.3333\end{bmatrix} \tag{۱-۲۵}$$

$$\begin{bmatrix}216-2.5\omega_2^2 & -0.6\\ -0.6 & 6-1.08\omega_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1^2\\ X_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix}-0.004 & -0.6\\ -0.6 & -87.3137\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1^2\\ X_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \implies$$

$$-0.6X_1^2 - 87.3137X_2^2 = 0 \implies \frac{X_2^2}{X_1^2} = \frac{-0.6}{87.3137} = - \;\rightarrow\; X^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.0069 \end{bmatrix} \qquad (۲۶-۱)$$

پاسخ سوال شماره دو

پاسخ قسمت الف:

انرژی پتانسیل کل سیستم، T_{sys}:

از آن‌جایی که ارابه به جرم m_1 در حین حرکت نوسانی خود، هیچ تغییر ارتفاعی را تجربه نمی‌کند، لذا انرژی پتانسیل آن برابر صفر است. انرژی پتانسیل فنر برابر است با:

$$U_1 = \frac{1}{2}(2k)(x_1 - 0)^2 = kx_1^2 \qquad (۱-۲)$$

هم‌چنین انرژی پتانسیل گرانشی جرم m_2 در معادلات ارتعاش سیستم تاثیری ندارد و لذا آن را در نظر نمی‌گیریم.

برای فنر k نیز انرژی پتانسیل برابر است با:

$$U_2 = \frac{1}{2}k\left((x_1 + x_2) - 0\right)^2 = \frac{k}{2}(x_1 + x_2)^2 \qquad (۲-۲)$$

و در نهایت، انرژی پتانسیل کل سیستم عبارت است از:

$$U_{sys} = U_1 + U_2 = kx_1^2 + \frac{k}{2}(x_1 + x_2)^2 \qquad (۳-۲)$$

انرژی جنبشی کل سیستم، U_{sys}:

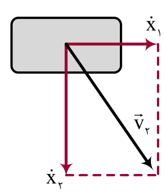
انرژی جنبشی ارابه به جرم m_1 برابر است با:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 \qquad (۴-۲)$$

و انرژی جنبشی جسم به جرم m_2 برابر است با:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \qquad (۵-۲)$$

برای به دست آوردن سرعت مطلق جسم به جرم m_2 در رابطه فوق، $\vec{v}_2$، به شکل (۳) توجه کنید.



شکل ۳. محاسبه بردار سرعت خطّی مطلق جسم به جرم m_2

و لذا انرژی جنبشی جسم به جرم m_2 برابر است با:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \qquad (۶-۲)$$

و در نهایت، انرژی جنبشی کل سیستم عبارت است از:

$$T_{sys} = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{(m_1+m_2)}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 \qquad (۷-۲)$$

در ادامه با فرض برابر بودن جرم‌های دو جسم، (که در صورت سوال قسمت (**الف**) به آن اشاره شده است)، لاگرانژین سیستم برابر است با:

$$L = T_{sys} - U_{sys} = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - \frac{k}{2}(x_1 + x_2)^2 \qquad (۸-۲)$$

در ادامه با فرض بردار متغیرهای تعمیم‌یافته برابر $\vec{q}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$، برای یافتن معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش سیستم، از معادله لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

برای متغیر تعمیم‌یافته x_1 داریم:

$$\frac{d}{dt}\{(m_1+m_2)\dot{x}_1\}-\{-2kx_1-k(x_1+x_2)\}=F(t)$$

که با ساده‌سازی رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+3kx_1+kx_2=F(t) \tag{۲-۹}$$

برای متغیر تعمیم‌یافته x_2 داریم:

$$\frac{d}{dt}\{m_2\dot{x}_2\}-\{-k(x_1+x_2)\}=0$$

که با ساده‌سازی رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$m_2\ddot{x}_2+kx_1+kx_2=0 \tag{۲-۱۰}$$

و در نهایت معادلات دیفرانسیل سیستم عبارتست از:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}_1+3kx_1+kx_2=F(t)\\ m_2\ddot{x}_2+kx_1+kx_2=0\end{cases} \tag{۲-۱۱}$$

حالا فرم ماتریسی معادلات دیفرانسیل (۲-۱۱) را با توجه به تعریف بردار متغیرهای تعمیم‌یافته سیستم می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}[\ddot{\vec{q}}]_{2\times1}+\begin{bmatrix}3k & k\\ k & k\end{bmatrix}[\vec{q}]_{2\times1}=\begin{bmatrix}F_0\\0\end{bmatrix}\sin(\omega t) \tag{۲-۱۲}$$

فرکانس طبیعی و شکل مودها:

می‌دانیم فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها در ارتعاش آزاد محاسبه می‌شوند، لذا معادله ارتعاش آزاد را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}[\ddot{\vec{q}}]_{2\times1}+\begin{bmatrix}3k & k\\ k & k\end{bmatrix}[\vec{q}]_{2\times1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{۲-۱۳}$$

با توجه به معادلات ماتریسی (۲-۱۳)، ماتریس جرم و فنریت سیستم عبارتند از:

$$[M]=m\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad [K]=k\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{۲-۱۴}$$

و معادله فرکانسی سیستم عبارت است از:

$$\det\{[K]-\omega^2[M]\}=\left|\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}-\frac{m\omega^2}{k}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0\ \Rightarrow$$

در ادامه، تغییر متغیر $\lambda=\frac{m\omega^2}{k}$ را اعمال می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix}3-2\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow 3-5\lambda+2\lambda^2-1=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{2}\\ \lambda_2=2\end{cases}$$

و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سیتسم عبارتند از:

$$\lambda_i = \frac{m\omega_i^2}{k} \;\rightarrow\; \omega_i = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{k}{m}} \;\Longrightarrow\; \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{2m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{cases} \tag{۱۵-۲}$$

در ادامه برای محاسبه شکل مودهای طبیعی داریم:

$$\{[K] - \omega_i^2[M]\}\begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۱۶-۲}$$

که در آن $X^i = \begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{bmatrix}$ شکل مودهای طبیعی سیستم یا بردارهای ویژه آن هستند. و در نهایت، شکل مود طبیعی اول و دوم عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 3k - 2m\omega_1^2 & k \\ k & k - m\omega_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Longrightarrow\; \begin{bmatrix} 2k & k \\ k & \frac{k}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Longrightarrow$$

$$kX_1^1 + \frac{k}{2}X_2^1 = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{X_2^1}{X_1^1} = -2 \;\rightarrow\; X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{۱۷-۲}$$

$$\begin{bmatrix} 3k - 2m\omega_2^2 & k \\ k & k - m\omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Longrightarrow\; \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Longrightarrow$$

$$kX_1^2 - kX_2^2 = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{X_2^2}{X_1^2} = \frac{k}{k} = 1 \;\rightarrow\; X^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۱۸-۲}$$

پاسخ قسمت ب:

با فرض این‌که نیروی تحریک خارجی هارمونیک $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ به جسم به جرم m_1 در این سیستم ارتعاشی دو درجه آزادی خطی وارد شود (با فرض این‌که شرایط اولیه سیستم برابر صفر باشد)؛ آن‌گاه در حالت پایدار یا ***steady-state*** کل سیستم با فرکانس تحریک خارجی ω، شروع به نوسان می‌کند. معنای این حرف آن است که پاسخ $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در حالت پایدار عبارت است از:

$$\begin{matrix} x_1(t) = A\sin(\omega t) \\ x_2(t) = B\sin(\omega t) \end{matrix} \;\Longrightarrow\; \vec{q}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\sin(\omega t) \;\Longrightarrow\; \ddot{\vec{q}}(t) = -\omega^2\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\sin(\omega t) \tag{۱۹-۲}$$

حالا با جانشانی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ از رابطه (۲-۱۹) فوق، در معادله ارتعاش اجباری (۲-۱۲)، خواهیم داشت:

$$-\omega^2\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\sin(\omega t) + \begin{bmatrix} 3k & k \\ k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\sin(\omega t) = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(\omega t) \tag{۲۰-۲}$$

در ادامه را از طرفین رابطه فوق ساده‌سازی نموده و خواهیم داشت:

$$\left\{\begin{bmatrix} 3k & k \\ k & k \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۲۱-۲}$$

حالا در رابطه (۲-۲۱)، مجهول‌های A و B را می‌توان به سادگی محاسبه کرد:

$$\begin{bmatrix} 3k - 2m\omega^2 & k \\ k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Longrightarrow\; \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k - 2m\omega^2 & k \\ k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} k-m\omega^2 & -k \\ -k & 3k-2m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}}{(2m\omega^2-k)(m\omega^2-2k)} = \frac{\begin{bmatrix} (k-m\omega^2)F_0 \\ -kF_0 \end{bmatrix}}{(2m\omega^2-k)(m\omega^2-2k)} \;\Longrightarrow\; \begin{cases} A = \frac{(k-m\omega^2)F_0}{(2m\omega^2-k)(m\omega^2-2k)} \\ B = \frac{-kF_0}{(2m\omega^2-k)(m\omega^2-2k)} \end{cases} \tag{۲۲-۲}$$

و به این ترتیب، دامنه‌های مجهول A و B به دست می‌آیند. لذا پاسخ حالت پایدار $x_1(t)$ و $x_2(t)$ عبارتند از:

$$x_1(t) = A\sin(\omega t) = \frac{(k-m\omega^2)F_0}{(2m\omega^2-k)(m\omega^2-2k)}\sin(\omega t) \tag{۲۳-۲}$$

$$x_2(t) = Bsin(\omega t) = \frac{-kF_0}{(2m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k)} \sin(\omega t) \tag{۲۴-۲}$$

پاسخ قسمت ج:

طبق تعریف فرکانس جاذب؛ فرکانس تحریک خارجی (ω) است که اگر تحریک خارجی با آن فرکانس به سیستم اعمال شود، باعث کمینه شدن دامنه ارتعاش آن قسمت از سیستم که تحریک به آن اعمال شده بود می‌گردد.

طبق تعریف فوق، بایستی دامنه ارتعاش ارابه (چون نیروی تحریک خارجی هارمونیک به آن اعمال شده است) کمینه شود. لذا باید پاسخ ارتعاش $x_1(t)$ را بررسی کنیم:

$$\min\{x_1(t)\}|_\omega = \min\left\{\frac{(k - m\omega^2)F_0}{(2m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 2k)}\right\}\Big|_\omega = 0 \quad if\ (k - m\omega^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{۲۵-۲}$$

راه حل دوم برای محاسبه فرکانس جاذب (فرکانس ضد تشدید):

طبق تعریف باید دامنه ارتعاش ارابه برابر با صفر شود ($x_1(t) = 0$). لذا سیستم دیگر دو درجه آزادی نیست، بلکه یک درجه آزادی است و فقط شامل یک جسم به جرم $m_2 = m$ است که از یک فنر خطی ایده‌آل k آویزان شده است و لذا فرکانس تحریک جاذب (فرکانس تحریک ضد تشدید) برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{۲۶-۲}$$