



## ارتعاش آزاد ورق ضخیم کامپوزیتی مستطیلی شناور روی سیال به روش ریلی-ریتز

حمید رحمانی<sup>۱\*</sup>، علی اصغر جعفری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>ایران، تهران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک، ۴۳۳۴۴-۱۹۹۹۱، دانشجو کارشناسی ارشد.

<sup>۲</sup>ایران، تهران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۴۳۳۴۴-۱۹۹۹۱، استاد.

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [brahmani@mail.kntu.ac.ir](mailto:brahmani@mail.kntu.ac.ir)

### چکیده

در این مقاله، ارتعاش آزاد برای یک سازه در تماس با سیال بررسی شده است. به طور خاص، روش انرژی برای بررسی ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی افقی ضخیم تئوری برشی مرتبه اول از جنس کامپوزیتی شناور بر روی سطح سیال مورد استفاده قرار گرفته است. با فرض تئوری برشی مرتبه اول برای ورق ضخیم، یک حل عددی به کمک روش ریلی-ریتز برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم صورت گرفته است. برای مدل‌سازی سیال، با در نظر گرفتن فرضیات همگن، غیریسکوز و غیرچرخشی، معادله لاپلاس استفاده شده و سپس روابط مربوط به انرژی جنبشی و پتانسیل برای سیستم استخراج گردیده است. آن‌گاه برای دو حالت خاص ورق با شرایط مرزی دورمفصل و دورگیردار؛ پس از تشکیل فانکشنال انرژی سیستم و کمینه نمودن آن، معادله فرکانسی برای سیستم ورق ضخیم کامپوزیتی در خلا و در تماس با سیال محاسبه شده است. به منظور اعتبارسنجی نتایج این پژوهش، مقادیر فرکانس‌های طبیعی حاصله با نتایج نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مقایسه گردیده و هم‌خوانی خوبی بین این نتایج حاصل شده است. در نهایت، رفتار ارتعاشی سیستم ورق-سیال برای حالت‌های مختلف نسبت طول به عرض، آرایش لایه‌های کامپوزیتی، عمق و جنس سیال بررسی گردیده است.

**کلمات کلیدی:** ارتعاش آزاد؛ ورق-سیال؛ ریلی-ریتز؛ فرکانس طبیعی.

مسئله تداخل سازه-سیال<sup>۱</sup> یاد می‌کنند. مسائل از نوع تداخل سازه-سیال محدوده بسیار وسیعی از کاربردهای مهندسی از جمله: سازه‌های کشتی‌ها، سازه‌های شناور روی دریا، سازه‌های ساحلی، سدها و زیردریایی‌ها را شامل می‌شود. حضور سیال در کنار ورق باعث افزایش چشم‌گیر انرژی جنبشی سیستم می‌گردد و نتیجتاً کاهش مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال، نسبت به ورقی که در خلأ ارتعاش می‌کند را در پی دارد و مجموعه این دلایل، مطالعه رفتار دینامیکی این سازه‌های الاستیک در تماس با سیال را به منظور جلوگیری از تشدید مودهای سازه امری اجتناب ناپذیر می‌نماید.

رابینسون و پالم [۱]، بررسی مودال برای یک ورق مستطیلی شناور بر روی سیال را انجام دادند؛ آن‌ها پاسخ ارتعاش اجباری را برای یک بار نقطه‌ای هارمونیک به دست آوردند. کواک [۲]، ارتعاش آزاد ورق مستطیلی شناور بر روی سیال را مورد بررسی قرار داد و برای محاسبه معادله فرکانسی از روش ریلی-ریتز و تابع گرین بهره برد. برموز و همکاران [۳]، ارتعاش آزاد و اجباری ورق مستطیلی در تماس با سیال تراکم‌ناپذیر محدود را به کمک روش اجزاء محدود بررسی کردند که اثر میرایی لایه ویسکوالاستیک مابین سیال و آب را نیز بر تحلیل مسئله افزودند. کربوآ و لاکیس [۴]، یک روش نیمه-تحلیلی برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های تحت تاثیر جریان سیال پیشنهاد نمودند. معادلات نهایی ورق و معادلات نهایی سیال به یکدیگر وابسته بودند که پس از حل معادلات کوپله، مسئله ارتعاشات را برای ورق دورمفصل و دورگیردار حل کردند. خورشیدی [۵ و ۶]، به ترتیب به بررسی ارتعاشات آزاد خطی یک ورق مستطیلی نازک با شرایط مرزی گیردار در تماس مقطعی با سیال و ارتعاش هیدرواستاتیکی یک ورق مستطیلی کوپل شده با سیال پرداخت. وی با به کار بردن روش انرژی ریلی-ریتز، مقادیر فرکانس طبیعی و شکل مودهای خیس برای ورق کوپل شده با سیال را استخراج نمود. حسینی‌هاشمی و همکاران [۷]، به بررسی ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی ضخیم در تماس با سیال پرداختند. آن‌ها به کمک روش گالرکین معادلات دیفرانسیل مسئله را استخراج نموده و به روش ریلی-ریتز مقادیر فرکانس طبیعی را محاسبه کردند. کرامر و همکاران [۸] و خورشیدی و فرهادی [۹]، به بررسی ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی در تماس با سیال محدود پرداختند و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم ورق-سیال را محاسبه نمودند. قدیریان و همکاران [۱۰]، ارتعاشات ورق کامپوزیتی عمودی را که از یک طرف با یک سیال نامحدود تماس داشت بررسی کرده‌اند. آن‌ها مدل‌سازی سیال را به کمک جداسازی متغیرها و روش بسط فوریه انجام دادند و مسئله مقدار ویژه را به روش ریلی-ریتز و با توابع مثلثاتی حل کرده‌اند.

در این مقاله، ارتعاش آزاد ورق کامپوزیتی ضخیم شناور بر روی سیال تراکم‌ناپذیر به روش عددی ریلی-ریتز بررسی شده است و فرکانس طبیعی سیستم برای دو شرط مرزی دورمفصل و گیردار محاسبه گردیده است. نوآوری و وجه تمایز بین این مقاله با سایر کارهای مشابه در دو مورد بیان می‌شود: ۱- ورق در نظر گرفته شده در این مقاله به صورت افقی و بر روی سیال شناور است، ولی در پژوهش‌های پیشین، ورق به صورت عمودی و در یک طرف با سیال در تماس بوده است و ۲- برخلاف پژوهش‌های پیشین، جنس ورق کامپوزیتی در نظر گرفته شده است.

## ۲. مدل‌سازی فیزیکی و ارائه روابط ریاضی ورق-سیال

### ۲.۱ مدل‌سازی ورق

مدل فیزیکی یک ورق مستطیلی قرار گرفته روی سطح سیال را در شکل (۱) ملاحظه می‌کنید، که در آن  $a$ ،  $b$  و  $h$  به ترتیب طول، عرض و ضخامت ورق است و جنس آن کامپوزیتی بوده و فرض رفتار الاستیک خطی و جابجایی‌های بسیار کوچک برقرار است. با فرض تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی در مختصات کارتزین به صورت رابطه (۱) خواهد بود [۱۱]:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  جابجایی‌های ورق به ترتیب در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$ ،  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  شیب‌های ورق ناشی از خمش به

<sup>1</sup> Fluid Structure Interaction Problem: FSI

ترتیب در راستای محورهای  $x$  و  $y$  هستند.  $u_1, u_2$  و  $u_3$  نیز اجزاء میدان جابه‌جایی در راستای محورهای  $x, y$  و  $z$  هستند. با توجه به رابطه (۱) و فرض کرنش خطی، روابط کرنش-جابه‌جایی برای ورق مستطیلی به قرار رابطه (۲) خواهد بود [۱۱]:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z\kappa_{xx}^0 \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^0 + z\kappa_{yy}^0 \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 \quad (2)$$

که در آن مقادیر  $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0, \gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0, \kappa_{xx}^0, \kappa_{yy}^0, \kappa_{xy}^0$  از رابطه (۳) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz}^0 &= \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz}^0 &= \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} & \kappa_{xx}^0 &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \kappa_{yy}^0 &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & \kappa_{xy}^0 &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

این‌جا فرض می‌شود ورق کامپوزیتی متشکل از  $k$  لایه بوده و مختصات محلی هرکدام از لایه‌ها  $(x^k, y^k, z^k)$  است. هم‌چنین مختصات محلی  $z^k$  منطبق بر مختصات  $z$  مرجع بوده و زاویه الیاف کامپوزیتی تک‌جهته نسبت به مختصات مرجع برابر  $\theta_k$  باشد. حالا با توجه به قانون هوک تعمیم‌یافته، معادلات بنیانی برای لایه  $k$  ام ورق کامپوزیتی به صورت رابطه (۴) خواهد بود [۱۱]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^k \quad (4)$$

که در آن ضرایب تعمیم‌یافته تنش صفحه‌ای هستند [۱۱]. رابطه انرژی پتانسیل و جنبشی ورق با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی، به ترتیب از روابط (۵) و (۶) محاسبه می‌گردند:

$$U_P = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy}^{cf} \gamma_{xy} + \tau_{yz}^{cf} \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{cf} \gamma_{xz}) dz dy dx \quad (5)$$

$$T_P = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h \left( \rho_P \left[ (\dot{u} + z\dot{\varphi}_x)^2 + (\dot{v} + z\dot{\varphi}_y)^2 + (\dot{w})^2 \right] \right) dz dy dx \quad (6)$$

که در آن چگالی ورق بوده و  $\tau_{ij}^{cf} = S_{cf} \tau_{ij}$  است که  $S_{cf} = \frac{\pi^2}{12}$  فاکتور اصلاح برشی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود [۱۱].

## ۲.۱.۱ شرایط مرزی ورق و توابع مجاز

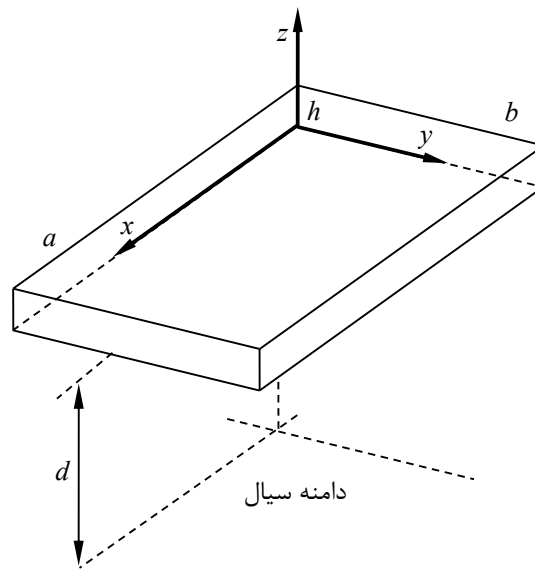
در این‌جا دو شرط مرزی را برای ورق کامپوزیتی در نظر می‌گیریم: ۱- شرط مرزی دورمفصل و ۲- شرط مرزی دورگیردار. برای اعمال شرایط مرزی دورمفصل و دورگیردار بایستی به ترتیب قیودی طبق روابط (۷) و (۸) بر مرزهای ورق اعمال گردند:

$$\begin{aligned} @ x=0, a : u=v=w=\varphi_y=M_{xx} &= 0 \\ @ y=0, b : u=v=w=\varphi_x=M_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} @ x=0, a : u=v=w=\varphi_x=\varphi_y &= 0 \\ @ y=0, b : u=v=w=\varphi_x=\varphi_y &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

حال با توجه به شرایط مرزی؛ توابع آزمون مجاز<sup>۳</sup> که حداقل بایستی شرایط مرزی ورق را از لحاظ هندسی ارضاء نمایند، به کمک توابع هارمونیک برای حالت دورمفصل (با بالانویس  $S$ ) و دورگیردار (با بالانویس  $C$ ) مانند رابطه (۹) معرفی می‌شوند:

<sup>2</sup> Shear Correction Factor: SCF



شکل ۱. ورق مستطیلی کامپوزیتی شناور بر روی سطح سیال دارای عمق ثابت  $d$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u^S(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \\ v^S(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \\ w^S(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} w_{m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \\ \varphi_x^S(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \varphi_{1,m,n}(t) g(x, m, a) f(y, 2n, b) \\ \varphi_y^S(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \varphi_{2,m,n}(t) f(x, 2m, a) g(y, n, b) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u^C(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \\ v^C(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \\ w^C(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} w_{m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \\ \varphi_x^C(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \varphi_{1,m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \\ \varphi_y^C(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \varphi_{2,m,n}(t) f(x, m, a) f(y, n, b) \end{array} \right. \quad (9)$$

که در آن  $f(x, m, a) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$  بوده و  $g(x, m, a) = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$  است. همچنین مقادیر شماره‌دهنده‌ها در رابطه (۹)

برای همگرایی مناسب نتایج شبیه‌سازی، برابر  $M = N = 9$  و  $\hat{M} = \hat{N} = 5$  در نظر گرفته شده است.

## ۲.۲ مدل‌سازی سیال

سیال مورد بررسی دارای چگالی  $\rho_F$  بوده و طول، عرض و عمق مخزن سیال به ترتیب برابر  $a$ ،  $b$  و  $d$  می‌باشند. سیال از نوع همگن و غیرقابل تراکم فرض شده و دارای جابجایی‌های اندک است؛ در نتیجه دامنه ارتعاش آن کوچک خواهد بود. همچنین سیال غیرویسکوز و فاقد حرکت چرخشی می‌باشد. تابع پتانسیل سرعت نوسانی سیال را به صورت رابطه  $\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) e^{j\omega t}$  در نظر گرفته و مجموعه فرض‌های سیال، این الزام را ایجاد می‌کند که پتانسیل سرعت سیال مطابق رابطه (۱۰) باشد:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) \triangleq \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (10)$$

<sup>3</sup> Admissible Trial Functions: ATF's

حال برای اعمال شرایط مرزی سیال، توجه داریم که در ناحیه تماس بین ورق و سیال برای سرعت‌های در راستای محور  $z$ ، رابطه  $\left. \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t}$  بایستی برقرار باشد [۱۲]. بقیه شرایط مرزی برای دیواره‌های مخزن سیال مانند رابطه (۱۱) هستند [۱۲]:

$$\left. \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_{x=0, a} = \left. \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right|_{y=0, b} = \left. \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right|_{z=-d} = 0 \quad (11)$$

با به‌کارگیری روش جداسازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی سیال از رابطه (۱۱) به معادله  $(1^0)$ ، پاسخ تابع پتانسیل سرعت  $\Phi(x, y, z, t)$  به صورت رابطه (۱۲) استخراج می‌گردد:

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(t) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right) \left( e^{S_{m,n}z} + e^{S_{m,n}(2d-z)} \right) \quad (12)$$

که در آن پارامتر  $S_{m,n}$  برابر  $\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2b}\right)^2}$  است. حال با اعمال شرط مرزی ناحیه تماس ورق و سیال به رابطه (۱۲)، ضرایب مجهول  $A_{m,n}(t)$  نیز از رابطه (۱۳) به دست می‌آید:

$$A_{m,n}(t) = \frac{C_1 \int_0^a \int_0^b \dot{w}(x, y, t) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right) dy dx}{S_{m,n} (1 - e^{-2dS_{m,n}})}; \quad C_1 = \begin{cases} 1 & (m, n = 0) \\ 2 & (m = 0, n \neq 0) \\ 2 & (n = 0, m \neq 0) \\ 4 & (m, n \neq 0) \end{cases} \quad (13)$$

و در ادامه انرژی جنبشی سیال ناشی از تماس آن با ورق از رابطه (۱۴) محاسبه خواهد شد:

$$T_F = \frac{1}{2} \rho_F \int_0^a \int_0^b \left. \phi(x, y, z) \right|_{z=0} \left( -\frac{\partial w}{\partial t} \right) dy dx \quad (14)$$

### ۳. روش ریلی-ریتز

دیدگاه ریلی-ریتز برای حل عددی بر مبنای کمینه‌سازی تفاضل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل بیشینه سیستم استوار است. روند حل مسئله در این روش به این صورت است که ابتدا انرژی‌های جنبشی و پتانسیل بیشینه سیستم را محاسبه کرده و سپس فانکشنال سیستم به صورت رابطه (۱۵) تشکیل می‌شود:

$$I \triangleq U_P^{\max} - (T_P + T_F)^{\max} \quad (15)$$

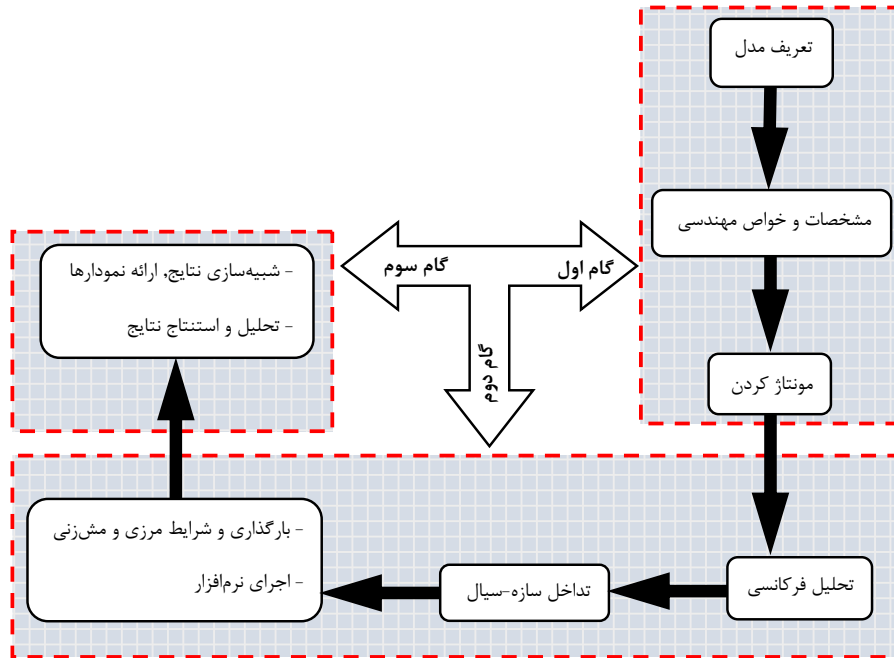
آن‌گاه با جای‌گذاری توابع سعی مجاز در رابطه (۱۵)، فانکشنال سیستم به صورت تقریبی بر حسب بردار ثوابت متغیر با زمان مسئله؛ یعنی  $\vec{q}_{m,n}(t) = [u_{m,n}(t), v_{m,n}(t), w_{m,n}(t), \phi_{1,m,n}(t), \phi_{2,m,n}(t)]^T$  پیدا می‌شود. در ادامه تغییرات مرتبه اول فانکشنال سیستم را برابر با صفر قرار داده و پس از ساده‌سازی آن، معادله فرکانسی سیستم (معادله گالرکین) که از آن مقادیر فرکانس طبیعی سیستم ورق-سیال  $(\omega_{f,m,n})$  به دست می‌آید، مطابق رابطه (۱۶) استخراج می‌گردد:

$$\sum \{ [K_P] - \omega_{m,n}^2 ([M_P] + [M_F]) \} C^{m,n} = \bar{0} \quad (16)$$

$$K_P = \frac{\partial^2 U_P}{\partial q_i \partial q_j}; \quad M_P = \frac{\partial^2 T_P}{\partial q_i \partial q_j}; \quad M_F = \frac{\partial^2 T_F}{\partial q_i \partial q_j}; \quad (i, j = 1, \dots, 5)$$

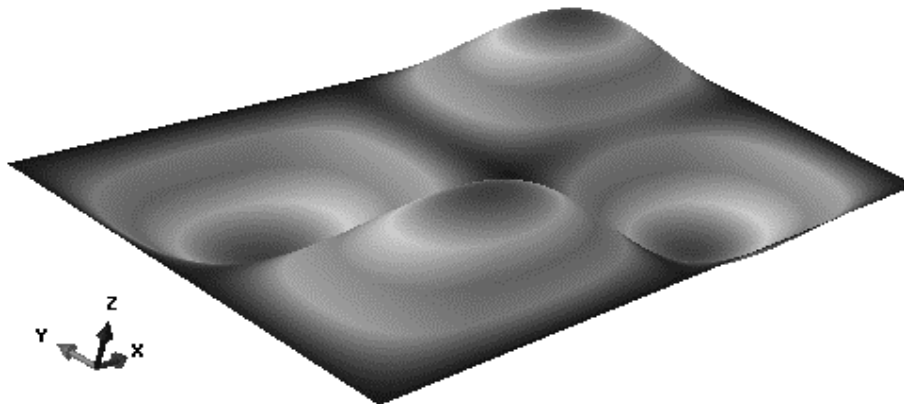
#### ۴. مدل سازی المان محدود

در این قسمت به طور مختصر به نحوه مدل سازی مسئله در نرم افزار آباکوس پرداخته می شود. برای این منظور ابتدا مدل سیال و مدل ورق را به طور جداگانه در نرم افزار ایجاد نموده و سپس با مشخص کردن پارامترها، ابعاد و خواص ورق کامپوزیتی و سیال، حل عددی توسط نرم افزار صورت می گیرد. الگوریتم حل نرم افزاری به صورت شکل (۲) می باشد.

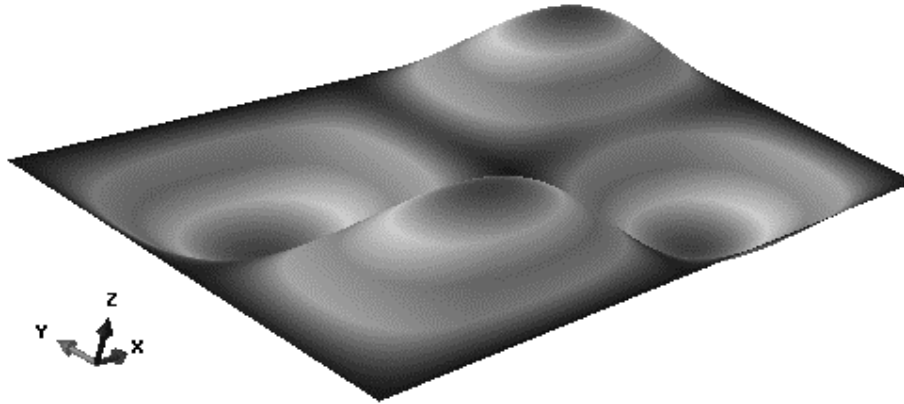


شکل ۲. الگوریتم حل مسئله ورق-سیال در نرم افزار آباکوس.

شکل (۲) الگوریتم نرم افزاری حل مسئله را که شامل سه گام ۱- پیش پردازش، ۲- پردازش و ۳- پس پردازش می باشد، توصیف می کند. ورق با هندسه سه بعدی، از نوع قابل تغییر شکل با المان پوسته بوده و سیال با هندسه سه بعدی با المان یکپارچه مدل می شود. سپس خواص کامپوزیتی لایه های ورق مطابق جدول (۱) به نرم افزار داده شده و سیال را به صورت یک واسط آکوستیک با چگالی و مدول حجمی یکنواخت تعریف می کنیم. در قسمت مش زنی نیز، دامنه فیزیکی ورق کامپوزیتی و دامنه سیال، به صورت المان های بسیار کوچک با ابعاد  $0/005$  گسسته سازی شده تا همگرایی مش و نتایج به خوبی صورت بگیرد و همچنین المان ورق از نوع پوسته ای و برای سیال از نوع آکوستیک انتخاب گردیده است. در شکل های (۳) و (۴)، به ترتیب مودهای  $m, n = 2$  مربوط به ورق ساده و ورق-سیال حاصل از نرم افزار آباکوس ارائه شده اند.



شکل ۳. شکل مود  $m, n = 2$  ورق بدون حضور سیال حاصل از نرم افزار آباکوس. (خواص مطابق جدول ۱ است)



شکل ۴. شکل مود  $m, n = 2$  سیستم ورق-سیال حاصل از نرم افزار آباکوس. (خواص مطابق جدول ۱ است)

در قسمت نتایج و بحث، بیشتر راجع به فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق بدون سیال و سیستم ورق-سیال و تاثیر حضور سیال بر فرکانس طبیعی و شکل مودها توضیح خواهیم داد.

## ۵. نتایج و بحث

برای بررسی کارایی و دقت نتایج به دست آمده از روش ریلی-ریتز، ابتدا حل عددی معادله (۱۶) انجام شده و اعتبارسنجی با نتایج به دست آمده از نرم افزار اجزاء محدود آباکوس صورت گرفته است. سپس نتایج بیشتری از این کار ارائه خواهند شد. مشخصات و خواص مهندسی برای ورق کامپوزیتی و سیال در جدول (۱) ارائه گردیده است. مقادیر فرکانس طبیعی برای یک ورق بدون سیال (جدول ۲) و شناور بر روی سیال (جدول ۳) با شرط مرزی دورمفصل و دورگیردار، برای دو حالت نسبت سفتی ۱۰ و ۲۰، محاسبه شده‌اند. همان‌طور که از جداول (۲ و ۳) ملاحظه می‌گردد، مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش نسبت سفتی از ۱۰ به ۲۰، افزایش قابل ملاحظه‌ای داشته است. هم‌چنین با افزودن سیال به سیستم، مقادیر فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند که این امر ناشی از افزایش انرژی جنبشی ورق شناور روی سیال می‌باشد. هم‌چنین در مقایسه مقادیر فرکانس‌های طبیعی برای دو شرط مرزی، همواره مقادیر فرکانس‌های طبیعی برای ورق دورگیردار، بیشتر از مقادیر متناظر برای دورمفصل است. دلیل این امر این است که ورق دورگیردار نسبت به دورمفصل دارای سفتی بیشتری بوده و در نتیجه مقادیر فرکانس طبیعی آن نسبت به دورمفصل بیشتر خواهد شد.

مطابق جدول (۴) فرکانس طبیعی پایه سیستم ورق-سیال با دو شرط مرزی دور مفصل و دورگیردار، برای چند عمق مختلف سیال محاسبه شده است. همان‌طور که در جدول (۴) دیده می‌شود، اولاً: مقادیر فرکانس طبیعی پایه سیستم با افزایش نسبت سفتی رابطه مستقیم داشته و افزایش می‌یابد، ثانیاً: با کاهش عمق سیال مقادیر فرکانس طبیعی پایه کاهش پیدا می‌کند و می‌توان این‌گونه استنباط نمود که هرچه عمق مخزن سیال افزایش یابد، تحرک ورق افزایش یافته و به تبع آن فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

جدول (۵) فرکانس طبیعی پایه سیستم ورق-سیال را برای چند نسبت ابعادی مختلف نشان می‌دهد. از جدول (۵) می‌توان استنباط نمود که مقادیر فرکانس طبیعی پایه سیستم با کاهش نسبت ابعادی رابطه معکوس داشته و افزایش می‌یابد. در واقع برای یک عرض ثابت؛ هرچه طول ورق کامپوزیتی افزایش یابد، فرکانس‌های طبیعی دارای تغییرات معکوس بوده و کاهش می‌یابند. در شکل (۵)؛ تاثیر زوایای مختلف لایه‌های ورق کامپوزیتی و هم‌چنین تاثیر جنس و چگالی انواع مختلف سیال بر روی مقادیر فرکانس طبیعی سیستم به ترتیب در شکل (a-۵) و شکل (b-۵) ملاحظه می‌گردند. در شکل (a-۵) ملاحظه می‌شود که مقادیر فرکانس طبیعی سیستم با افزایش چگالی سیال رابطه عکس داشته و کاهش می‌یابد. به همین دلیل بیشترین فرکانس طبیعی برای بنزین با کمترین چگالی از بین چهار سیال مورد بررسی است. هم‌چنین در شکل (b-۵) ملاحظه می‌گردد که با افزایش زوایای لایه‌های کامپوزیتی از صفر تا ۶۰ درجه، مقادیر فرکانس طبیعی سیستم دارای رابطه معکوس بوده و کاهش می‌یابند. بالعکس برای زوایای از ۶۰ تا ۹۰ درجه، مقادیر فرکانس طبیعی سیستم دارای رابطه مستقیم بوده و افزایش می‌یابند.

جدول ۱. مشخصات و خواص مهندسی ورق کامپوزیتی [۱۱] و سیال

$Bulk\ Modulus\ (GPa)$	$\rho\ (kg/m^3)$	$G_{12}\ (GPa)$	$\nu_{12}$	$E_{22}\ (GPa)$	$E_{11}\ (GPa)$	
-	2440	6.5	0.25	13	130	گرافیت-اپوکسی
2.15	1000	-	-	-	-	آب خالص
4.35	1261	-	-	-	-	گلیسیرین
1.3	737.2	-	-	-	-	بنزین
2.34	1025	-	-	-	-	آب دریا

جدول ۲. مقایسه فرکانس‌های طبیعی ورق کامپوزیتی بدون سیال ( $\omega_{m,n}$ ) بر حسب هرتز، برای دو شرط مرزی دورمفصل و دورگیردار

دورگیردار (CCCC)		دورمفصل (SSSS)		(m,n)	$E_{11}/E_{22}$
اجزاء محدود	ریلی-ریتز	اجزاء محدود	ریلی-ریتز		
76.8630	78.0176	54.7340	55.2890	(1,1)	10
100.8343	101.3857	85.6178	88.3852	(2,2)	10
138.3248	141.1940	113.1066	118.1277	(3,3)	10
143.2611	149.0423	136.2563	140.2005	(4,4)	10
174.6974	181.0823	138.0143	143.1978	(5,5)	10
90.9681	84.4487	63.3757	65.2209	(1,1)	20
115.3694	110.1167	93.8359	98.2047	(2,2)	20
173.5668	153.2942	126.3550	133.2885	(3,3)	20
223.3439	154.8447	143.0525	150.2278	(4,4)	20
241.0031	188.1104	152.4187	164.2904	(5,5)	20

جدول ۳. مقایسه فرکانس‌های طبیعی سیستم ورق شناور بر روی آب ( $\omega_{f,m,n}$ ) بر حسب هرتز، برای دو شرط مرزی دورمفصل و دورگیردار

دورگیردار (CCCC)		دورمفصل (SSSS)		(m,n)	$E_{11}/E_{22}$
اجزاء محدود	ریلی-ریتز	اجزاء محدود	ریلی-ریتز		
73.2579	74.3940	48.4639	51.0438	(1,1)	10
97.6671	99.1137	76.2968	79.3312	(2,2)	10
149.613	152.3018	107.3099	111.4320	(3,3)	10
195.4458	201.3316	120.0027	129.3054	(4,4)	10
214.2993	219.8225	132.1174	137.8195	(5,5)	10
83.0175	92.9223	59.3298	62.4395	(1,1)	20
108.4283	119.0038	81.1185	83.9834	(2,2)	20
149.0270	180.3759	115.0338	118.7400	(3,3)	20
150.2261	228.2015	135.8839	141.2863	(4,4)	20
184.2675	252.1992	149.0389	158.8290	(5,5)	20

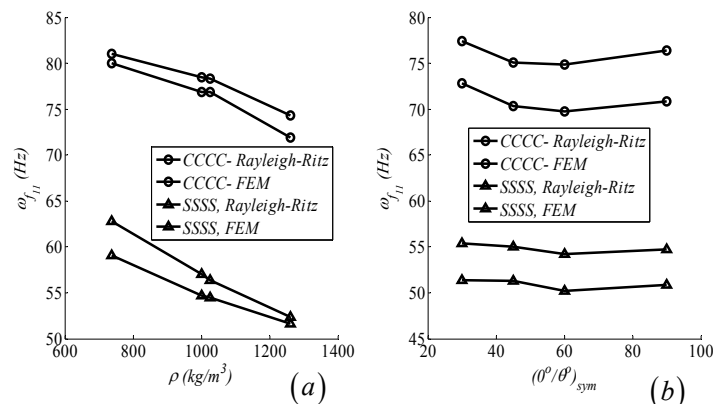
جدول ۴. مقایسه فرکانس طبیعی پایه ( $m, n = 1$ ) سیستم ورق شناور روی آب بر حسب هرتز، برای بررسی تاثیر عمق مخزن سیال ( $d$ )

دورگیردار (CCCC)		دورمفصل (SSSS)		$d\ (m)$	$E_{11}/E_{22}$
اجزاء محدود	ریلی-ریتز	اجزاء محدود	ریلی-ریتز		
80.6273	84.1103	54.7340	56.0037	0.5	10
76.8630	78.4667	53.1926	54.1324	0.4	10
71.4378	77.2658	50.7818	52.0006	0.3	10
65.8121	70.3031	46.3503	49.2849	0.2	10
83.0175	85.0015	63.3757	64.2885	0.4	20
80.6273	83.1945	61.5525	62.8837	0.3	20
77.1671	81.9347	58.7308	60.5834	0.2	20
71.2038	75.1836	53.6640	57.4230	0.1	20



جدول ۵. مقایسه فرکانس طبیعی پایه ( $m, n = 1$ ) سیستم ورق شناور روی آب بر حسب هر تزی، برای بررسی تاثیر نسبت ابعادی ( $a/b$ )

دورمفصل (SSSS)		دورگیردار (CCCC)		$a/b$	$E_{11}/E_{22}$
اجزاء محدود	ریلی-ریتز	اجزاء محدود	ریلی-ریتز		
65.8121	70.3031	27.0095	28.1715	4	10
71.4378	77.2658	35.4426	37.4389	3	10
76.8630	78.4667	54.734	59.0034	2	10
80.6273	84.1103	105.719	111.8467	1	10
71.2038	78.1836	32.0031	33.8920	4	20
77.1671	81.9347	41.8136	44.2018	3	20
80.6273	83.1945	63.3757	68.2271	2	20
83.0175	85.0015	115.2547	120.8835	1	20



شکل ۵. مقایسه فرکانس طبیعی پایه سیستم ورق شناور روی آب بر حسب هر تزی، برای (a) بررسی تاثیر چگالی سیال، (b) بررسی تاثیر زاویه الیاف لایه کامپوزیتی.

## ۶. نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاش آزاد برای ورق ضخیم کامپوزیتی مستطیلی شناور بر روی سیال بررسی شده است و اثر پارامترهای مختلفی نظیر: نسبت طول به عرض، زاویه لایه‌های ورق و عمق و جنس سیال بررسی شده است و نتایجی که حاصل شده به این صورت است: ۱- با افزایش نسبت سفتی ( $E_{11}/E_{22}$ )، مقادیر فرکانس‌های طبیعی سیستم به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابند. ۲- با افزودن سیال به سیستم، مقادیر فرکانس‌های طبیعی سیستم به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابند. ۳- همواره مقادیر فرکانس طبیعی سیستم با شرط مرزی دورگیردار بیشتر از دورمفصل بوده است. ۴- با کاهش عمق مخزن سیال، مقادیر فرکانس طبیعی سیستم به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. ۵- هر چه نسبت ابعادی ( $a/b$ ) ورق کاهش یابد؛ مقادیر فرکانس طبیعی سیستم رابطه عکس داشته و افزایش می‌یابند. ۶- فرکانس طبیعی سیستم ورق-سیال با چگالی سیال رابطه معکوس دارد. ۷- با افزایش زاویه لایه‌های کامپوزیتی از صفر تا ۶۰ درجه، فرکانس طبیعی پایه دارای رابطه عکس بوده و بالعکس برای زوایای بیش از ۶۰ درجه، مقادیر فرکانس طبیعی سیستم دارای رابطه مستقیم است.

## مراجع

1. N. J. Robinson, S. C. Palmer, "A modal analysis of a rectangular plate floating on an incompressible fluid", *Journal of Sound and Vibration* 142(3), 453-460 (1990).
2. M. K. Kwak, "Axisymmetric vibration of circular plate in contact with fluid", *Journal of Sound and Vibration* 146(3), 381-389 (1991).

3. A. Bermudez, L. Hervella-Nieto, R. Rodriguez, "Finite element computation of the vibrations of a plate-fluid system with interface damping", *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(24), 3021-3038 (2001).
4. Y. Kerboua, A. A. Lakis, M. Thomas, L. Marcouiller, "Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid", *Journal of Applied Mathematical Modelling* 32, 2570-2586 (2008).
5. K. Khorshidi, "Free vibrations of thin rectangular plates in contact with bounded fluid", *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Mechanical Engineering*, Kerman, Iran, May 13-15, (2008). (In Persian)
6. K. Khorshidi, "Effect of hydrostatic pressure on vibrating rectangular plates coupled with fluid", *SCIENTICA IRANICA*, Transaction of Civil Engineering, 17(6), 415-429 (2010).
7. S. Hosseini-Hashemi, M. Karimi, H. Rokni, "Natural frequencies of rectangular mindlin plates coupled with stationary fluid", *Journal of Applied Mathematical Modelling* 36, 764-778 (2012).
8. M. R. Kramer, Z. Liu, Y. L. Young, "Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water", *Journal of Composite Structures* 95, 254-263 (2013).
9. K. Khorshidi, S. Farhadi, "Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid", *Journal of Composite Structures* 104, 176-186 (2013).
10. H. Ghadirian, M. R. Ghazavi, R. D. Firoozabadi, "Free vibration analysis of composite plates in contact with fluid using Rayleigh-Ritz method", *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Acoustic and Vibration*, Tehran, Iran, September 5-8 (2013). (In Persian)
11. J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis*, 2<sup>nd</sup> Ed, CRC Press, New-York, 2004.
12. S. A. Eftekhari, "Nonlinear vibration of floating beams carrying moving loads using new mixed methodologies", Ph.D. Thesis, KNTU University of Technology, Iran, (2013).