

تمرین سری اول

طراحی الگوریتم

دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. زمستان ۹۷
مهلت تحویل تا : ۱۸ اسفند

۱. همه تطابقهای پایدار مثال زیر را بدست آورید.

1	B	A	D	C		A	2	1	4	3
2	C	D	A	B		B	4	3	1	2
3	A	C	B	D		C	3	2	1	4
4	D	A	B	C		D	2	1	3	4
Men's Preference						Women's Preference				

۲. اگر m در لیست w نفر اول باشد و w در لیست m نفر اول باشد نشان دهید همیشه یک تطابق پایدار وجود دارد که حاوی زوج (m, w) است. آیا می‌توان گفت در همه تطابقهای پایدار زوج (m, w) وجود دارد؟

۳. نشان دهید در انتهای الگوریتم گیل - شاپلی هر زن با بدترین شریک معتبر خود ازدواج کرده است.

۴. در الگوریتم جستجوی دودویی که در کلاس ارائه شد، نشان دهید اگر $T(n)$ تعداد دستورالعملهای اجرا شده در بدترین حالت برای یک لیست مرتب n عضوی باشد، برای هر $i \leq j$ داریم $T(i) \leq T(j)$. (راهنمایی: از استقرا استفاده کنید.)

۵. در کلاس نشان دادیم که اگر $T(n)$ حداکثر تعداد تقسیمهای الگوریتم اقلیدس باشد آنگاه

$$T(n) \leq 2 \log n + 1$$

دقت کنید در اینجا فرض کردیم n عدد بزرگتر است. یعنی $n = \max\{a, b\}$. این نشان می‌دهد که $T(n) = O(\log n)$ حال می‌خواهیم نشان دهیم که $T(n) = \Omega(\log n)$. برای این منظور باید یک کران پایین برای $T(n)$ بدست آوریم. نشان دهید اگر ورودی الگوریتم اعداد F_{n+1} و F_{n+2} باشد F_i عدد i ام فیبوناچی است) آنگاه تعداد تقسیمهای الگوریتم اقلیدس برابر با n است. این ثابت می‌کند که $T(n) = \Omega(\log n)$. چرا؟

(راهنمایی: ثابت کنید F_n و F_{n+1} نسبت به هم اول هستند).

۶. جای دو عدد در لیست مرتب A را عوض کرده‌ایم. در بدترین حالت تعداد مقایسه‌های الگوریتمهای مرتب سازی حبابی و درجی برای مرتب کردن A چند است؟

۷. توابع زیر را بر اساس کران مجانبی $\Theta()$ مرتب کنید.

$$f_1(n) = n^{2.5} \quad f_2(n) = 2n + 3 \quad f_3(n) = n^{\log n}$$

$$f_4(n) = 2^n \quad f_5(n) = \log(n!) \quad f_6(n) = (\log n)!$$