

۱. با استفاده از خواص میدان نشان دهید:

- اگر برای دو عنصر a و b در میدان \mathbb{F} داشته باشیم $a.b = 0$ آنگاه یا $a = 0$ یا $b = 0$ (و یا هر دو).
- اگر a عنصری در میدان \mathbb{F} باشد و داشته باشیم $a.a = 1$ آنگاه $a \in \{-1, 1\}$
- اگر a و b_1, \dots, b_n عناصری در میدان \mathbb{F} باشند و حاصلضرب $\prod_{i=1}^n (a - b_i)$ صفر باشد آنگاه $a \in \{b_1, \dots, b_n\}$

۲. برای دستگاههای زیر تصویر سطری و تصویر ستونی را رسم کنید.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

۳. نقاط اشتراک سه ابرصفحه زیر چه زیرمجموعه‌ای از فضای 4 بعدی را تشکیل می‌دهد؟ یک خط؟ یک نقطه یا مجموعه تهی؟ جواب چه خواهد شد اگر صفحه $u = -1$ نیز اضافه شود؟ به دستگاه زیر یک معادله اضافه کنید که جواب دستگاه تهی شود.

$$\begin{cases} u + v + w + z = 6 \\ u + w + z = 4 \\ u + w = 2 \end{cases}$$

۴. سه عدد مختلف بجای k بگذارید که در حذف گاوسی مشکل ایجاد کند. برای کدام از این اعداد جابجایی سطری مشکل را برطرف می‌کند؟

$$\begin{cases} kx + 4y = 1 \\ 4x + ky = -1 \end{cases}$$

۵. دستگاه زیر را با دو عملیات سطری به بالا مثلثی تبدیل کنید. دور درایه‌های محوری دایره بکشید. جواب دستگاه را با جایگذاری پسرو بدست آورید.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ 4x + 7y + 5z = 20 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

۶. سه عدد مختلف به جای a بگذارید که حذف گاوسی را به بن بست بکشاند.

$$\begin{cases} ax + 2y + 2z = 6 \\ ax + ay + 3z = 3 \\ ax + ay + az = 2 \end{cases}$$

۷. با سعی و خطا برای هر یک از تساویهای زیر ماتریسهای 2×2 پیدا کنید که در آن صدق کند.

$$A^2 = -I \bullet$$

$$B \neq 0 \text{ در حالی که } B^3 = 0 \bullet$$

$$EF = 0 \text{ در حالی که هیچ درایه } E \text{ یا } F \text{ صفر نیستند.} \bullet$$

۸. برای ماتریسهای زیر A^k ، B^k و C^k را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = AB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۹. آیا برای هر ماتریس مربعی $(n \times n)$ A و B گزاره $(AB)^k = A^k B^k$ درست است؟

۱۰. چه ماتریسهایی A را به بالامثلی تبدیل می‌کند؟ حاصلضرب این ماتریسها چیست؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 E_2 E_1 A = U$$

۱۱. ماتریس زیر را تجزیه مثلثی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

۱۲. ثابت کنید ضرب دو ماتریس بالامثلی (مربعی) یک ماتریس بالامثلی است.

۱۳. نشان دهید عملیات سطری در روش حذف گاوسی تغییری در جواب دستگاه ایجاد نمی‌کند.