**جبر خطی ـ پاییز ۹۷ ـ چند مسئله همراه با راه حل**

۱. فرض کنید $W$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^4$ باشد که از اسپن بردارهای زیر حاصل شده است.

$$u_1 = (1, -2, 5, -3), \qquad u_2 = (2, 3, 1, -4), \qquad u_3 = (3, 8, -3, -5)$$

زیرفضای $W$ چه بعدی دارد؟ یک پایه برای $W$ پیدا کنید. پایه حاصل را به یک پایه برای $\mathbb{R}^4$ بسط دهید.

**حل:**

ماتریس $A$ را در نظر بگیرید. بردارهای $u_1$ و $u_2$ و $u_3$ سطرهای ماتریس $A$ هستند. پس

$$R(A) = sp(u_1, u_2, u_3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دو سطر اول و دوم $U$ مستقل خطی هستند. پس تشکیل یک پایه را برای $R(U)$ می‌دهند. چون عملیات سطری فضای سطری را تغییر نمی‌دهند، پس دو سطر اول $U$ یک پایه برای $R(A)$ نیز هستند.

حال می‌خواهیم دو بردار را به جمع دو بردار $(1, -2, 5, -3)$ و $(0, 7, -9, 2)$ اضافه کنیم بطوریکه تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^4$ را بدهد. به سادگی می‌توان دید که دو بردار $(0, 0, 1, 0)$ و $(0, 0, 0, 1)$ منظور ما را برآورده می‌کند.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲. نشان دهید $n+1$ بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ حتما وابسته خطی هستند.

**حل:** فرض کنید $n+1$ بردار $u_1, \ldots, u_{n+1}$ مستقل خطی باشند. در این صورت تنها جواب دستگاه زیر باید بردار صفر باشد (از تعریف استقلال خطی نتیجه می‌شود).

$$x_1 \begin{bmatrix} \\ u_1 \\ \\ \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \\ u_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \ldots + x_{n+1} \begin{bmatrix} \\ u_{n+1} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{n+1} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

اما ماتریس دستگاه بالا $n$ سطر دارد (چون هر $u_i$ در $\mathbb{R}^n$ واقع شده است) در حالیکه تعداد ستونها $n+1$ است. چون طرف راست، بردار صفر است پس این دستگاه حتما جواب دارد. از طرفی چون تعداد ستونها از تعداد سطرها بیشتر است دستگاه بینهایت جواب داد (حداقل یک متغیر آزاد خواهیم داشت.) در نتیجه دستگاه جواب غیر بدیهی دارد و این متناقض با فرض مستقل خطی بودن بردارهاست.

۳. نشان دهید اگر $u_1, \ldots, u_k$ مستقل خطی باشند آنگاه ترکیب خطی

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$$

که برابر با بردار $w$ باشد منحصر بفرد است.

**حل:** فرض کنید داشته باشیم

$$w = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$$
$$w = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k$$

با تفریق دو طرف از هم بدست می‌آید

$$0 = w - w = (\alpha_1 - \beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)u_k$$

چون $u_1, \ldots, u_k$ مستقل خطی هستند باید داشته باشیم

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \ldots \quad , \alpha_k - \beta_k = 0$$

پس

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \ldots \quad , \alpha_k = \beta_k$$

۴. آیا ستونهای ماتریس زیر یک پایه برای $\mathbb{R}^4$ را تشکیل می‌دهند؟ اگر نه، بعد فضایی که تشکیل می‌دهند چند است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

**حل:** ماتریس را پلکانی می‌کنیم. تنها سه ستون محوری بدست آمد. پس ستونها نمی‌توانند مستقل خطی

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

باشند و تشکیل پایه برای $\mathbb{R}^4$ را نمی‌دهند. فضای حاصل از ستونها تشکیل یک فضای سه بعدی را می‌دهد.

$$dim(C(B)) = 3$$

۵. فرض کنید $V$ یک فضای برداری و $S \subset V$ یک زیرفضای $V$ باشد بطوریکه $S \neq V$. نشان دهید

$$dim(S) < dim(V)$$

**حل:** فرض کنید $dim(S) = k$. یک پایه برای $S$ را در نظر بگیرید:

$$U = \{u_1, \ldots, u_k\}$$

چون $S \neq V$ پس وجود دارد $w \in V$ بطوریکه $w \notin S$. مجموعه بردار $U' = \{w\} \cup U$ باید مستقل خطی باشند چون $w$ را نمی‌توان بصورت ترکیب خطی بردارهای $U$ نوشت. زیرفضای $S'$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S' = sp(u_1, \dots, u_k, w)$$

بنا به تعریف

$$dim(S') = k + 1$$

روشن است که $S \subset S'$. چون $dim(S') \leq dim(V)$ پس

$$dim(S) = k < k + 1 = dim(S') \leq dim(V)$$

۶. فرض کنید $V$ یک فضای برداری با بعد $n$ باشد و $v_1, \dots, v_n$ بردارهای مستقل خطی در $V$ باشند. نشان دهید بردارهای $v_1, \dots, v_n$ تشکیل یک پایه برای $V$ را می‌دهند.

**حل:** چون بردارها شرط مستقل خطی بودن را دارند کافی است نشان دهیم

$$V = sp(v_1, \dots, v_n)$$

روشن است که $sp(v_1, \dots, v_n) \subseteq V$. پس کافی است نشان دهیم $V \subseteq sp(v_1, \dots, v_n)$

فرض کنید اینطور نباشد و وجود داشته باشد $w \in V$ بطوریکه

$$w \notin sp(v_1, \dots, v_n)$$

پس بردارهای $v_1, \dots, v_n, w$ مستقل خطی هستند. زیرفضای $W$ را تعریف می‌کنیم

$$W = sp(w, v_1, \dots, v_n)$$

نتیجه می‌شود

$$dim(W) = n + 1$$

اما این غیر ممکن است چون $W$ یک زیرفضای $V$ است. پس باید داشته باشیم

$$V \subseteq sp(v_1, \dots, v_n)$$

۷. یک پایه برای زیرفضای $W$ از $\mathbb{R}^3$ پیدا کنید زمانیکه

(a) $W = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$, (b) $W = \{(a, b, c) : (a = b = c)\}$

**حل:**

در حالت $(a)$ از صورت سوال ۵ نتیجه می‌شود چون $W \neq \mathbb{R}^3$ پس $dim(W) \leq 2$. دو بردار

$$(1, 0, -1) \in W \text{ and } (0, 1, -1) \in W$$

مستقل خطی هستند پس تشکیل یک پایه برای $W$ را می‌دهند ( از سوال قبل نتیجه می‌شود)

در حالت $(b)$ بردار $(1, 1, 1)$ تشکیل یک پایه را برای $W$ می‌دهد. چون هر بردار $w \in W$ به فرم $(k, k, k)$ است.

۸. نشان دهید ماتریس مربعی $A$ با ابعاد $n \times n$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر رتبه $A$ برابر با $n$ باشد.

**حل:** اول فرض می‌کنیم $A$ وارون پذیر است. نشان می‌دهیم $r(A) = n$.

چون $A$ وارون پذیر است پس ماتریس $A^{-1}$ وجود دارد که $AA^{-1} = I$. فرض کنید $u_1$ تا $u_n$ ستونهای ماتریس $A^{-1}$ باشند. با در نظر گرفتن تصویر ستونی از ضرب ماتریس ها بدست می‌آید.

$$Au_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_1 \quad Au_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_2 \quad \dots \quad Au_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = e_n$$

پس بردارهای استاندارد یکه $e_1, e_2, \dots, e_n$ از ترکیب خطی ستونهای $A$ بدست آمده‌اند. پس

$$\forall i, e_i \in sp(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

در نتیجه بعد فضای ستونی $A$ باید $n$ باشد. به عبارت دیگر $dim(C(A)) = n$. چون $r(A) = dim(C(A))$ پس ادعای ما درست است.

حال فرض می‌گیریم $r(A) = n$ و نشان می‌دهیم که $A$ وارون پذیر است. چون رتبه ماتریس $n$ است و $A$ مربعی با ابعاد $n \times n$ است در نتیجه دستگاههای زیر همه جواب یکتا دارند.

$$Au_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad Au_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad Au_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس زیر

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

همان $A^{-1}$ است.