جبر خطی ـ بهار ۹۷ ـ چند مسئله همراه با راه حل

۱. نشان دهید اگر A دارای یک سطر صفر باشد آنگاه AB نیز یک سطر صفر دارد. اگر B یک ستون صفر داشته باشد آنگاه AB نیز یک سطر صفر دارد.

حل: بنا به تفسیر سطری از ضرب ماتریسها، سطر iام AB ترکیبی خطی از سطرهای B است که ضرایب آن از سطر iام ماتریس A می‌آید. پس اگر سطر iام ماتریس A صفر باشد، سطر iام ماتریس AB هم صفر خواهد بود.

برای جواب قسمت دوم از تفسیر ستونی ضرب ماتریسها استفاده می‌کنیم و استدلال مشابهی دارد.

۲. (الف) چند ماتریس قطری با ابعاد $n \times n$ وجود دارد که درایه‌های آن 0 یا 1 هستند؟

(ب) چند ماتریس بالامثلثی با ابعاد $n \times n$ وجود دارد که درایه‌های آن 0 یا 1 هستند؟

(ج) چند ماتریس منفرد بالامثلثی با ابعاد $n \times n$ وجود دارد که درایه‌های آن 0 یا 1 هستند؟

حل: (الف) ماتریس حداکثر n درایه غیر صفر دارد که برای هر کدام دو حالت وجود دارد پس جواب 2^n است.

(ب) ماتریس چون بالا مثلثی است حداکثر $\frac{n(n+1)}{2}$ درایه غیر صفر دارد پس جواب $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ است.

(ج) ماتریس بالامثلثی نامنفرد است اگر همه درایه‌های قطر اصلی غیرصفر باشند. پس تعداد ماتریسهای بالامثلثی نامنفرد برابر است با $2^{\frac{n(n+1)}{2}-n}$. با توجه به جواب حالت قبل تعداد ماتریسهای منفرد بالامثلثی برابر خواهد بود با $2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 2^{\frac{n(n+1)}{2}-n}$

۳. دستگاه زیر را در نظر بگیرید. به ازای چه مقادیری از a و k دستگاه جواب یکتا دارد؟

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

حل: دستگاه مربعی $Ax = b$ جواب یکتا دارد اگر و فقط اگر A نامنفرد باشد. پس k تاثیری بر یکتا بودن جواب ندارد. با عملیات سطری، دستگاه را به شکل بالامثلثی در می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 9-a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k-a \end{bmatrix}$$

ماتریس نامنفرد است اگر $9 - a^2 \neq 0$. پس برای $a \neq \pm 3$ و همه مقادیر k دستگاه جواب یکتا دارد.

۴. مقادیر y_1 و y_2 و y_3 چه شرایطی داشته باشند که نقاط $(0, y_1)$ و $(1, y_2)$ و $(2, y_3)$ بر یک استقامت باشند؟

حل: نقاط را در یک ماتریس قرار می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ y_2 & y_1 & y_3 \end{bmatrix}$$

نقاط بر یک استقامت خواهند بود اگر بعد فضای ستونی یک باشد (بردار نقاط ضریبی از یک دیگر باشند.) به عبارت دیگر باید تنها یک ستون محوری پیدا شود. عملیات سطری را انجام می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & y_1 & y_3 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

پس باید داشته باشیم

$$y_1 = 0, \qquad y_3 - 2y_2 = 0$$

۵. بعد فضاهای زیر را تعیین کنید.

(الف) فضای تمام بردارهایی در $\mathbb{R}^4$ که جمع مولفه‌هایشان صفر است.

(ب) فضای پوچ ماتریس همانی 4×4

(ج) فضای تمام ماتریسهای 2×2

حل:

(الف)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

این یک ابرصفحه در فضای چهار بعدی است. پس بعد زیرفضای مربوطه 3 است. همچنین می‌توانیم به این شکل استدلال کنیم. x_1 را یک متغیر محوری و دیگر متغیرها آزاد می‌گیریم. چون سه متغیر آزاد داریم، پس بعد فضای پوچ 3 است.

(ب) چون ماتریس همانی مربعی است و نامنفرد پس فضای پوچ تنها شامل بردارِ صفر است. بعد زیرفضای مربوطه صفر است.

(ج) مجموعه ماتریسهای زیر تشکیل یک پایه را برای فضای مربوطه می‌دهد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هر ماتریس 2×2 را می‌توان با ترکیب خطی این ماتریسها نوشت و روشن است که این ماتریسها مستقل خطی هستند.

۶. اگر V و W دو زیرفضای 3 بعدی $\mathbb{R}^5$ باشند نشان دهید $V \cap W$ حتما یک بردار غیر صفر دارد.

حل: فرض کنید بردارهای v_1, v_2, v_3 پایه‌ای برای V و بردارهای w_1, w_2, w_3 پایه‌ای برای W باشند. مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$ وابسته خطی است چون شش بردار نمی‌توانند در $\mathbb{R}^5$ مستقل خطی باشند. پس مجموعه ضرایب غیر صفر وجود دارند که ترکیب خطی زیر را صفر کنند.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta w_3 = 0$$

در نتیجه

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = -\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \beta w_3$$

بردار $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ در V واقع است و بردار $w = -\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \beta w_3$ در W واقع است. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید α_1 غیر صفر باشد. با این فرض بردار v حتما غیر صفر است چون بردارهای پایه v_1, v_2, v_3 مستقل خطی هستند. چون $v = w$ پس یک بردار غیر صفر در $V \cap W$ پیدا شد.

۷. نشان دهید اگر V فضایی برداری با بعد 7 و W زیرفضایی از V با بعد 4 باشد، آنگاه پایه‌ای برای W را می‌توان با اضافه کردن سه بردار به پایه‌ای برای V تبدیل کرد.

حل: فرض کنید $v_1, \ldots, v_7$ پایه‌ای برای V و بردارهای $w_1, \ldots, w_4$ پایه‌ای برای W باشند. حتما یک بردار از جمع $v_1, \ldots, v_7$ وجود دارد که در زیرفضای W نیست. چون در غیر این صورت می‌توانیم V را با بردارهای درون پایه W تولید کنیم که یک تناقض است. حال بدون کاهش از کلیت مسئله، فرض کنید v_1 برداری باشند که در W نیست. مجموعه بردار $U = \{w_1, w_2, w_3, w_4, v_1\}$ لزوما مستقل خطی است. همین پروسه را تکرار می‌کنیم و یک بردار دیگر از جمع $v_2, \ldots, v_7$ به U اضافه می‌کنیم که در اسپن آن نباشد. به این ترتیب می‌توانیم تا سه بردار اضافه کنیم و مجموعه بردار حاصل مستقل خطی خواهد بود. چون V هفت بعدی است و هفت بردار مستقل خطی پیدا کرده‌ایم پس این بردارها تشکیل یک پایه را برای V می‌دهند.

۸. فرض کنید v_1, v_2, v_3 یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد و S یک زیرفضای دو بعدی از $\mathbb{R}^3$ باشد. آیا می‌توان با حذف یک بردار از v_1, v_2, v_3 پایه‌ای برای S بدست آورد؟

حل: خیر. ممکن است v_1, v_2, v_3 هیچکدام در S نباشند. برای مثال فرض کنید S صفحه $x + y + z = 0$ باشد و v_1, v_2, v_3 بردارهای یکه باشند.