

خلاصه‌ی هفته نهم

۱ مقادیر ویژه، بردارهای ویژه

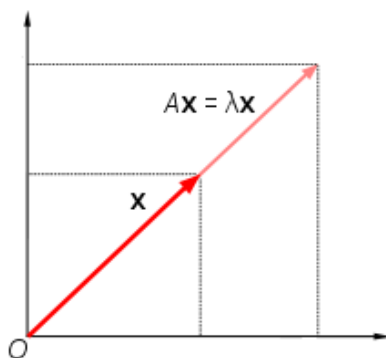
در دروس قبلی دیدیم که با دانستن یک پایه برای فضای برداری \mathbb{R}^n می‌توانیم ماتریس متناظر با هر تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را بدست آوریم. در ادامه خواهیم دید که برای تبدیل $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ بعضی پایه‌های \mathbb{R}^n نسبت به دیگران ارجحیت دارند. این پایه‌ها در واقع بر اساس بردارهای ویژه A ساخته شده‌اند.

تعریف: بردار غیر صفر x یک بردار ویژه برای ماتریس مربعی A است اگر ثابت λ وجود داشته باشد بطوریکه

$$Ax = \lambda x$$

در این حالت گفته می‌شود λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A است و بردار x یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه λ است.

از لحاظ هندسی، بردار x یک بردار ویژه برای A است اگر تبدیل A راستای بردار x را عوض نکند. چون λx و x در یک راستا هستند. دقت کنید بردار مورد نظر ما باید مخالف صفر باشد، چون بدیهی است بردار صفر در معادله بالا صدق می‌کند. از این گذشته می‌خواهیم بردارهای ویژه ما یک پایه برای \mathbb{R}^n تشکیل دهند. پس بردار صفر را قبول نمی‌کنیم.



چند مثال:

- بنا به تعریف، فضای پوچ A (غیر از بردار صفر آن) همگی بردارهای ویژه برای ماتریس A با مقدار ویژه $\lambda = 0$ هستند.

$$Ax = 0x = 0$$

- برای ماتریس همانی I هر بردار (غیر از بردار صفر) یک بردار ویژه است. تنها مقدار ویژه ماتریس همانی 1 است.

$$Ix = 1x$$

• برای ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ دو مقدار ویژه وجود دارد: $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در واقع هر بردار بصورت $c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda_1 = 1$ است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

همچنین هر بردار بصورت $c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda_2 = -1$ است.

• برای ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ نیز دو مقدار ویژه وجود دارد: $\lambda_1 = 4$ و $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید بردارهای ویژه $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ یکی هستند اما مقادیر ویژه متفاوتند (با هم اختلاف 3 دارند که همان درایه قطر اصلی است). این امری تصادفی نیست.

نکته: اگر λ یک جفت بردار ویژه و مقدار ویژه متناظر با ماتریس A باشند آنگاه $\lambda + k$ نیز یک جفت بردار ویژه و مقدار ویژه متناظر با ماتریس $A + kI$ هستند.

$$(A + kI)x = Ax + kIx = \lambda x + kx = (\lambda + k)x$$

۱.۱ محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

از آنجا که معادله $Ax = \lambda x$ یک معادله غیرخطی است، نمی‌توان با روشهای معمول مجهولهای آن را پیدا کنیم. باید از طریقی λ و x را هم جدا کنیم. معادله را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$Ax = \lambda Ix$$

در اینجا I ماتریس همانی n در n است. $x = Ix$. حال معادله را می‌توانیم به این شکل بنویسیم.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

برای اینکه این معادله جواب غیر صفر داشته باشد، باید ماتریس $A - \lambda I$ فضای پوچش غیربديهی باشد. به بیان دیگر باید ماتریس $A - \lambda I$ وارون پذیر نباشد. پس باید

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

این معادله تنها یک مجهول دارد. باید λ هایی را پیدا کنیم که باعث شوند ماتریس $A - \lambda I$ منفرد شود (به بیان دیگر دترمینانش صفر شود). ریشه‌های این معادله مقادیر ویژه ماتریس A خواهند بود. این معادله را معادله سرشت نامی ماتریس A می‌گویند. با پیدا کردن مقادیر ویژه، حال می‌توانیم معادله $Ax = \lambda Ix$ را حل کنیم و همه بردارهای ویژه را پیدا کنیم. این روش کلی محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه است.

چند مثال:

- مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ را دوباره محاسبه می‌کنیم. این بار با روش استاندارد. معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم.

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2$$

برای محاسبه بردارهای ویژه، باید فضای پوچ ماتریسهای $A - \lambda_1 I$ و $A - \lambda_2 I$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} 3 - \lambda_2 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

هر برداری در فضای پوچ این ماتریسها، یک بردار ویژه است. می‌توانیم همان جوابهای مخصوص را به عنوان بردارهای ویژه انتخاب کنیم. در مثال ما بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه زیر یکی از جوابهای معادلات بالا هستند. (که اتفاقا مستقل خطی هم هستند.)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- مقادیر ویژه ماتریس زیر را بدست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

این معادله جواب حقیقی ندارد. آیا این بدین معنی است که ماتریس A مقادیر ویژه ندارد؟ هم بله و هم نه. درستش این است که A مقادیر ویژه حقیقی ندارد اما در فضایی جامعتر یعنی \mathbb{C}^2 ، صفحه اعداد مختلط، این ماتریس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه دارد. باید هم همینطور باشد. معادله سرشت نما ریشه‌های مختلط دارد (i و $-i$). از طرف دیگر A در فضای \mathbb{R}^2 ماتریس دوران با زاویه 90 درجه است. طبیعی است هیچ بردار حقیقی \mathbf{x} نمی‌تواند وجود داشته باشد که $A\mathbf{x}$ و \mathbf{x} در یک راستا باشند. در فضای \mathbb{C}^2 ، بردارهای ویژه زیر برای A بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = (i) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

- مقادیر ویژه ماتریس زیر را بدست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 = 0$$

ریشه‌های تکراری $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 3$ بدست آمد. مقادیر ویژه یک ماتریس لزوماً متمایز نیستند. می‌توانند تکراری باشند! این اشکالی ندارد، اما خبر بد این است که ممکن است نتوانیم دو بردار ویژه مستقل پیدا کنیم. در این مثال همین اتفاق هم می‌افتد. فضای پوچ ماتریس $A - \lambda I$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 3 & 1 \\ 0 & 3 - 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

فقط یک جواب مخصوص بدست می‌آید.

$$v_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بعضی از ماتریسها n بردار ویژه مستقل خطی (چه حقیقی و چه مختلط) ندارند و این یکی از این موارد است.

- چه مقادیری به جای m بگذاریم تا اینکه ماتریس زیر راستای همه بردارهای \mathbb{R}^2 را تغییر دهد؟

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر A نباید بردار ویژه حقیقی داشته باشد. به عبارت دیگر، معادله سرشت نمای A نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ m & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2m - 3 = 0$$

باید دلتا منفی باشد.

$$\Delta = 4 - 4(2m - 3) < 0$$

پس

$$m > 2$$

- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & 0 & -3 \\ -9 & -2 - \lambda & 3 \\ 18 & 0 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(-1)^4 \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -3 \\ 18 & -8 - \lambda \end{vmatrix} \\ = -(\lambda + 2)(\lambda^2 + \lambda - 2) \\ = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0$$

ریشه‌های زیر بدست می‌آید.

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 1$$

بردارهای ویژه وابسته دو ریشه اول را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 7 - (-2) & 0 & -3 \\ -9 & -2 - (-2) & 3 \\ 18 & 0 & -8 - (-2) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -9 & 0 & 3 \\ 18 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

جوابهای مخصوص را پیدا می‌کنیم. فضای پوچ را با استفاده از آنها بیان می‌کنیم.

$$N(A - \lambda_1 I) = c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دو بردار ویژه بدست آمد. دقت کنید با وجود اینکه ریشه‌ها تکراری بودند، اما دو بردار ویژه مستقل خطی بدست آمد. حال بردار ویژه وابسته به ریشه سوم را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 7 - (1) & 0 & -3 \\ -9 & -2 - (1) & 3 \\ 18 & 0 & -8 - (1) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -9 & -3 & 3 \\ 18 & 0 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

جوابهای مخصوص را پیدا می‌کنیم.

$$N(A - \lambda_3 I) = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

جفت مقدار ویژه و بردارهای ویژه زیر بدست آمد.

$$\lambda_1 = -2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = -2, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 1, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲ چند نکته و قضیه

- هر ماتریس مربعی A با ابعاد $n \times n$ ، دارای n مقدار ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ است که لزوما متمایز و حقیقی نیستند. دلیل این مسئله این است که معادله سرشت نما $|A - \lambda I| = 0$ یک معادله با درجه n است و طبق قضیه اساسی جبر، هر معادله با درجه n ، به تعداد n ریشه دارد (حقیقی یا مختلط).
- بعضی از ماتریسها با وجود داشتن n مقدار ویژه، به تعداد n بردار ویژه مستقل خطی ندارند.
- مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس، برابر با مجموع درایه‌های قطر اصلی آن است. مجموع درایه‌های قطر اصلی یک ماتریس اثر آن ماتریس trace گفته می‌شود و با $\text{tr}(A)$ نشان داده می‌شود.

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

- حاصلضرب مقادیر ویژه برابر با دترمینان ماتریس است.

$$\det A = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n$$

۳ قطری سازی Diagonalization

در این جلسه **قطری سازی** یکی از کاربردهای مقادیر ویژه، را معرفی می‌کنیم و یک مسئله کاربردی را با استفاده از قطری سازی حل می‌کنیم. ابتدا دو قضیه زیر را یادآور می‌شویم.

قضیه: هر ماتریس مربعی با ابعاد $n \times n$ که روی میدان اعداد مختلط \mathbb{C} تعریف شده باشد، اگر n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی دارد.
قضیه: ماتریس متقارن A با ابعاد $n \times n$ که درایه‌های آن اعداد حقیقی باشند، n مقدار ویژه حقیقی و n بردار ویژه مستقل خطی در فضای \mathbb{R}^n دارد.

لازم به ذکر است در صورت وقوع تکرار در مقادیر ویژه، ماتریس مورد بحث ممکن است n بردار ویژه مستقل خطی نداشته باشد.

فرض کنید ماتریس A ، n بردار ویژه مستقل خطی v_1, \dots, v_n وابسته به مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ داشته باشد.

$$\forall i \quad Av_i = \lambda_i v_i$$

بردارهای ویژه را بصورت ستونی در ماتریس S می‌گذاریم. ماتریس S را ماتریس بردارهای ویژه A می‌گوییم.

$$S = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

حال A را از سمت راست در S ضرب می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} AS &= A \times \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= S\Lambda \end{aligned}$$

ماتریس $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر ویژه می‌گوییم. پس رابطه زیر بدست می‌آید.

$$AS = S\Lambda$$

چون ستونهای S مستقل خطی هستند، پس وارون S وجود دارد. حال اگر طرفین را از سمت چپ در S^{-1} ضرب کنیم، داریم

$$ASS^{-1} = SAS^{-1}$$

رابطه زیر یک تجزیه از ماتریس A بدست می‌دهد و به آن قطری سازی ماتریس A می‌گوییم.

$$A = SAS^{-1}$$

ذکر دو نکته ضروری است:

- هر ماتریس مربعی به شیوه بالا قطری شدنی نیست. ماتریس A باید n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد تا قطری شدنی باشد.
- چون یک ماتریس می‌تواند مجموعه بردارهای ویژه مستقل خطی متفاوتی داشته باشد، ماتریس S منحصر بفرد نیست. ماتریس مقادیر ویژه Λ نیز بستگی به این دارد که بردارهای ویژه را با چه ترتیبی در ستونهای S قرار داده باشیم. پس Λ هم منحصر بفرد نیست.

۱.۳ محاسبه A^k

یکی از کاربردهای اصلی قطری سازی در پیدا کردن سریع توانهای یک ماتریس است. با توجه به رابطه $A = SAS^{-1}$ توان دوم A را بدست می‌آوریم.

$$A^2 = SA \underbrace{S^{-1}S}_I AS^{-1} = S\Lambda\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$

از این می‌توانیم نتیجه بگیریم که مقادیر ویژه ماتریس A^2 همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند که به توان 2 رسیده‌اند چون برای ماتریسهای قطری داریم

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر،

$$A^2 = S \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

این مطلب را می‌توان جور دیگر هم اثبات کرد. فرض کنید λ و v یک جفت مقدار ویژه و بردار ویژه برای ماتریس A باشند.

$$Av = \lambda v$$

آنگاه

$$A^2v = A\lambda v = \lambda Av = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$$

به همین ترتیب برای توانهای بالاتر بدست می‌آید.

$$A^k = S \Lambda^k S^{-1} = S \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} S^{-1}$$

از رابطه بالا نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه: اگر A قطری شدنی باشد و برای هر i داشته باشیم $|\lambda_i| < 1$ آنگاه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{0}$$