

۱. فضای ستونی و فضای پوچ ماتریس  $A$  را بدست آورید. دستگاه  $Ax = b$  را حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۲. آیا بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

۳. معین کنید که آیا هر یک از مجموعه بردارهای زیر پایه‌ای برای  $\mathbb{R}^3$  را تشکیل می‌دهند یا نه.

- (a)  $(1, 1, 1), (1, 0, 1)$ ; (c)  $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)$ ;  
(b)  $(1, 2, 3), (1, 3, 5), (1, 0, 1), (2, 3, 0)$ ; (d)  $(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$ .

۴. چه رابطه‌ای بین  $b_1$  و  $b_2$  و  $b_3$  برقرار باشد تا دستگاه زیر جواب داشته باشد. رتبه ماتریس چند است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

۵. نشان دهید  $rank(AB) \leq rank(A)$  همچنین  $rank(AB) \leq rank(B)$ .

۶. ماتریسی بسازید که فضای پوچش همه ضرایب بردار  $(4, 3, 2, 1)$  باشد.

۷. ماتریسی بسازید که فضای پوچش همه ترکیبهای خطی دو بردار  $(2, 2, 1, 0)$  و  $(3, 1, 0, 1)$  باشد.

۸. ماتریسی  $2 \times 2$  بسازید که فضای پوچ و فضای ستونی‌اش یکسان باشند. چرا نمی‌توان ماتریسی  $3 \times 3$  ساخت که فضای پوچ و فضای ستونی‌اش یکسان باشند؟

۹. بعد چهار زیرفضای اساسی دو ماتریس زیر را معین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰. در صورتی که  $AB = Z$ ، هنگامی که  $Z$  ماتریس کاملاً صفر است، نشان دهید که فضای ستونی ماتریس  $B$  در فضای پوچ ماتریس  $A$  واقع شده است. به عبارت دیگر  $C(B) \subseteq N(A)$ .

۱۱. هر تبدیل خطی، یک خط در فضا را به یک خط تبدیل می‌کند. نشان دهید اگر نقطه  $z$  بین نقاط  $x$  و  $y$  باشد، آنگاه نقطه  $Az$  نیز بین نقاط  $Ax$  و  $Ay$  واقع شده است.

۱۲. ماتریس  $3 \times 3$  را معین کنید که

(آ) بردار  $u \in \mathbb{R}^3$  را روی صفحه  $x - y$  تصویر می‌کند. (یعنی  $z$  ش را صفر می‌کند)

(ب) بردارها را نسبت به صفحه  $x - y$  منعکس می‌کند.

(ج) صفحه  $x - y$  را 90 درجه می‌چرخاند درحالی‌که محور  $z$  ها را تغییر نمی‌دهد.

۱۳. کدامیک از تبدیلات زیر خطی نیست؟

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 \quad (\text{و})$$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \max\{x_1, x_2, x_3\} \quad (\text{ز})$$