جبر خطی ـ پاییز ۹۸ ـ تمرین سری چهارم
مهلت تحویل تا : ۲ دیماه

۱. دترمینان ماتریسهای زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 & t^3 \\ 1 & t & t^2 & t \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{bmatrix}$$

۲. برای گزاره‌های زیر مثال نقض بیاورید.

$$det(A+B) = det(A) + det(B)$$

$$det(A+B) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad det(A) \leq 0 \ \text{یا}\ det(B) \leq 0$$

۳. ماتریس همساز ماتریسهای زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

۴. C_n دترمینان ماتریسی است که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی‌اش 1 است و بقیه صفرند. می‌خواهیم C_n

$$C_1 = |0| \quad C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad C_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad C_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

را بدست آوریم. C_1 و C_2 و C_3 و C_4 را حساب کنید. با استفاده از فرمول همسازها، یک رابطه میان C_n و C_{n-1} و C_{n-2} پیدا کنید. C_{10} چند می‌شود؟

۵. بدون استفاده از قضیه $det(AB) = det(A)det(B)$ نشان دهید اگر P_1 و P_2 دو ماتریس جایگشت باشند، آنگاه

$$det(P_1P_2) = det(P_1)det(P_2)$$

۶. مقادیر ویژه ماتریسهای زیر را بدست آورید. متناظر با هر مقدار ویژه یک بردار ویژه بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

.

۷. آیا ماتریسهای زیر قطری شدنی هستند؟ چرا؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۸. ماتریس B یک ماتریس 3 در 3 است مقادیر ویژه‌اش -1، 1 و 2 هستند.

- رتبه B چند است؟
- دترمینان B^TB چند است؟

۹. دو ماتریس A و B مقادیر ویژه $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ و بردارهای ویژه مستقل خطی $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ یکسان دارند. نشان دهید $A = B$. راهنمایی: هر بردار $\boldsymbol{x}$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی $\boldsymbol{x} = v_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$ نوشت. از Ax و Bx برای اثبات تساوی A و B استفاده کنید.

۱۰. $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$. ماتریس A^5 را با استفاده از قطری‌سازی بدست آورید.

۱۱. درست یا نادرست؟ اگر مقادیر ویژه A برابر با 0 و 2 و 5 باشد، آنگاه A حتما

- وارون پذیر نیست.
- قطری شدنی است.
- قطری شدنی نیست.

۱۲. نشان دهید اگر $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند بطوریکه تکراری در آنها نباشد آنگاه بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه مستقل خطی خواهند بود.

۱۳. در یک منطقه، به دلیل شیوع یک بیماری، هر ماه نصف کسانی که سالم هستند بیمار می‌شوند و یک چهارم کسانی که بیمار هستند می‌میرند. فرض کنید w_0 جمعیت افراد سالم، s_0 جمعیت افراد بیمار، و d_0 تعداد مرده‌ها در شروع کار باشد. روابط زیر برقرار است.

$$\begin{bmatrix} d_{k+1} \\ s_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ s_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

در نهایت جمعیت افراد سالم، بیمار و مرده‌ها نسبت به جمعیت آغازین به چه صورت خواهد بود؟