

۱. نشان دهید اگر ستونهای A مستقل خطی باشند آنگاه $A^T A$ وارونپذیر است. همچنین نشان دهید

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$$

۲. اگر A یک ماتریس متعامد باشد آنگاه سطرهای A برهم عمودند و هر کدام طول واحد دارند. از این نتیجه می شود که ستونهای A هم برهم عمودند (چرا؟). اما اگر سطرها طول واحد نداشته باشند، آنگاه ستونها لزوما متعامد نیستند. ماتریسی مربعی 4×4 مثال بزنید که سطرهایش متعامدند ولی ستونهایش متعامد نیستند.

۳. نشان دهید $x - y$ بر $x + y$ عمود است اگر و فقط اگر $\|x\| = \|y\|$.

۴. همه بردارهایی در \mathbb{R}^3 را پیدا کنید که بر هر دوی $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ عمودند.

۵. نشان دهید اگر V و W دو زیرفضای عمود برهم باشند آنگاه تنها بردار مشترک آنها بردار صفر است.

۶. چه مضربی از $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ نزدیکترین بردار به $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ است؟

۷. با استفاده از نامساوی شوارتز، نامساوی زیر را اثبات کنید.

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

۸. ماتریسی را پیدا کنید که تصویر هر نقطه روی خط $x + 2y = 0$ را بدست می دهد.

۹. ماتریس تصویر قائم روی فضایی که از ترکیبهای خطی دو بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بدست می آید را پیدا کنید.

۱۰. با روش کمترین مربعات، خط $b = C + Dt$ را پیدا کنید که کمترین فاصله را با نقاط زیر داشته باشد.

$$t = -1, b = 4 \bullet$$

$$t = -1, b = 3 \bullet$$

$$t = 0, b = 1 \bullet$$

$$t = 2, b = 0 \bullet$$

۱۱. با استفاده از متد گرام اشمیت یک پایه متعامد برای صفحه زیر پیدا کنید.

$$V = \{2x + y - z = 0 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$