جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ـ ترم پاییز ـ سال ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: جبر خطی و کاربردهای آن (گیلبرت استرنگ)

خلاصه‌ی هفته سوم

۱ فضای برداری

تعریف: فضای برداری S روی میدان F مجموعه‌ای از بردارها با دو عمل جمع و ضرب است که شرایط زیر را داشته باشد.

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S \qquad \vec{u} + \vec{v} \in S$
2. $\forall \vec{u} \in S, \forall c \in F \qquad c\vec{u} \in S$
3. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S \qquad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
4. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S \qquad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$
5. $\exists\, \vec{0} \in S, \forall \vec{u} \in S \qquad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
6. $\forall \vec{u} \in S, \exists\, -\vec{u} \in S \qquad \vec{u} + -\vec{u} = \vec{0}$
7. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S, \forall a, b \in F \qquad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
8. $\forall \vec{u} \in S, \forall a, b \in F \qquad a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
9. $\forall \vec{u} \in S, \exists\, 1 \in F \qquad 1\vec{u} = \vec{u}$

چند مثال: از فضای برداری

- $\mathbb{R}^n$ فضای بردارهای با بعد n روی میدان اعداد حقیقی
- $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های حقیقی
- $P_n(\mathbb{R})$ مجموعه چندجمله‌ای های یک متغیره با درجه n

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

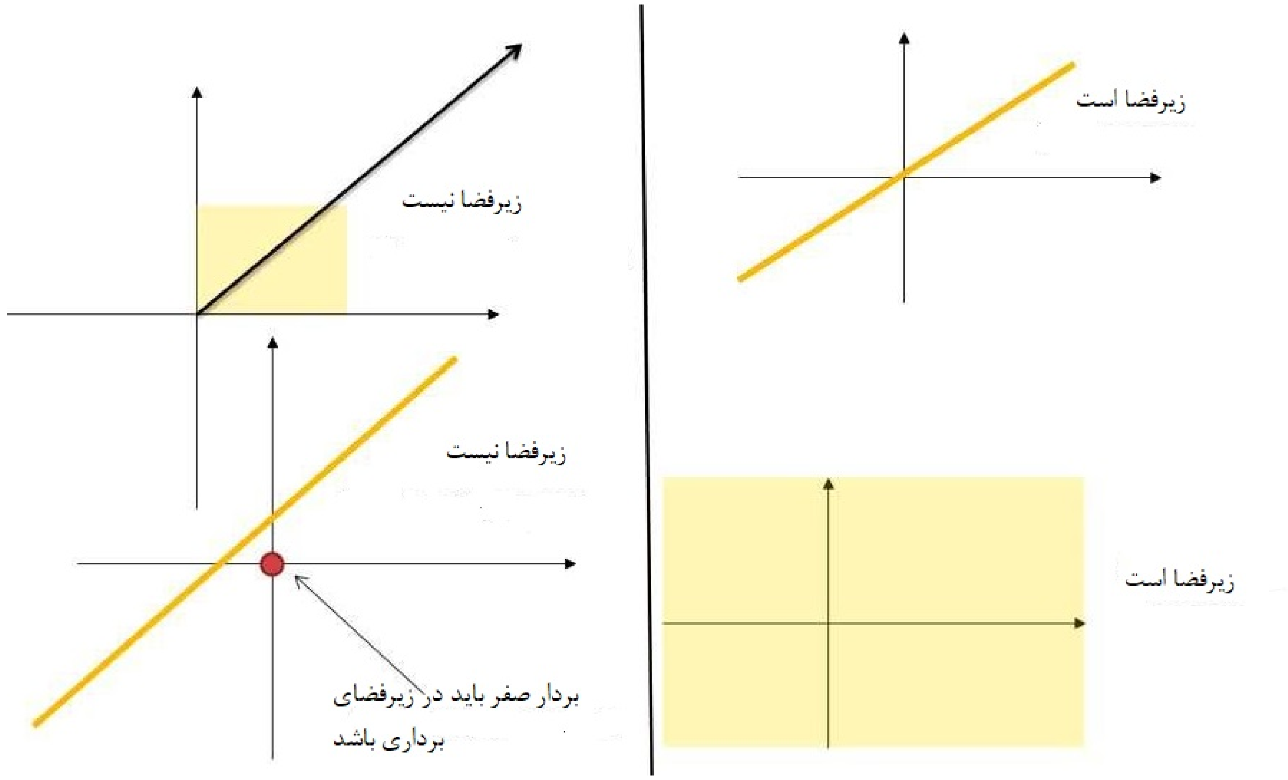
۱.۱ زیرفضا

فرض کنید $S' \subseteq S$ یک زیر مجموعه از فضای برداری S روی میدان F باشد. S' یک زیرفضای برداری است اگر

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in S' \qquad \vec{u} + \vec{v} \in S'$$

$$\forall \vec{u} \in S', \forall a \in F \qquad a\vec{u} \in S'$$

به عبارت دیگر S' تحت اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد.



نکته مهم: یک فضای برداری حتما حاوی بردار صفر است.

نشان دهید در فضای $\mathbb{R}^2$ هر خطی که از مبدا می‌گذرد یک زیرفضای برداری است.
باید نشان دهیم نقاط روی خط دو خاصیت گفته شده برای زیرفضا برداری را دارند. فرض کنید دو بردار $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ و $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ روی یک خط باشند که از مبدا می‌گذرد. پس باید داشته باشیم.

$$ax + by = 0$$
$$au + bv = 0$$

روشن است که

$$a(x + y) + b(y + v) = 0$$

در نتیجه مجموع $(x, y) + (u, v)$ هم روی خط مذکور است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد برای هر $c \in \mathbb{R}$ نقطه (cx, cy) هم روی خط مذکور واقع است. این ثابت می‌کند که هر خطی که از مبدا بگذرد یک زیرفضای برداری است.

بطور کل در فضای $\mathbb{R}^n$ هر ابرصفحه که از مبدا بگذرد یک زیرفضای برداری است.

۲ اسپن span

تعریف: فرض کنید $\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k}$ بردارهایی در فضای $\mathbb{F}^n$ برای میدان $\mathbb{F}$ باشند. اصطلاحا به مجموعه همه ترکیبهای خطی حاصل از بردارهای مذکور اسپن این بردارها گفته می‌شود و با نماد زیر نمایش داده می‌شود.

$$\text{sp}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k}) = \{\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{u_k} \mid \forall i \; \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

مثال: فرض کنید دو بردار $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$ در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند. آنگاه

$$\mathrm{sp}(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}) = \{a\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix} \mid \forall a, b \in \mathbb{R}\}$$

لم: $\mathrm{sp}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k})$ یک زیرفضای برداری در $\mathbb{F}^n$ است.
اثبات: نشان می‌دهیم برای هر $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$ که در $\mathrm{sp}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k})$ داریم

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathrm{sp}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k})$$

$$\forall c \in \mathbb{F},\ c\boldsymbol{u} \in \mathrm{sp}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k})$$

چون $\boldsymbol{u}$ در $\mathrm{sp}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k})$ است پس ضرایب $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ وجود دارند که

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{u_k}$$

به همین ترتیب ضرایب $\beta_1, \ldots, \beta_k$ وجود دارند که

$$\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + \beta_k\boldsymbol{v_k}$$

در نتیجه

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{u_1} + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\boldsymbol{v_k}$$

پس $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ در $\mathrm{sp}(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k})$ واقع است.

عضویت $c\boldsymbol{u}$ را هم به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد.

$$c\boldsymbol{u} = c\alpha_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + c\alpha_k\boldsymbol{u_k}$$

$\square$

چند مثال:

- $\mathrm{sp}(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}) = \{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\}$
- $\mathrm{sp}(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}) = \{c\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \forall c \in \mathbb{R}\} \qquad \Rightarrow$ یک خط در امتداد بردار $\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$
- $\mathrm{sp}(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-4\end{bmatrix}) = \{c\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}, \forall c \in \mathbb{R}\}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, C(A) = \mathrm{sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}) = \mathrm{sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix})$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C(A) = \mathrm{sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}) = \mathrm{sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}) = \mathbb{R}^2$

۳ زیرفضای ستونی و فضای پوچ

مرتبط با هر ماتریس A دو زیرفضای برداری وجود دارد: زیرفضای ستونی A که آن را با $C(A)$ نشان می‌دهند و فضای پوچ A که آن را با $N(A)$ نشان می‌دهند.

تعریف: زیرفضای ستونی ماتریس A مجموعه همه ترکیبهای خطی ستونهای ماتریس A است. به عبارت دیگر اگر $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ بردارهای متناظر با ستونهای A باشند، آنگاه

$$C(A) = \mathrm{sp}(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n})$$

مثال: زیرفضای ستونی ماتریس A یک صفحه در فضای $\mathbb{R}^3$ است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C(A) = \mathrm{sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}) = \{a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \mid \forall a, b \in \mathbb{R}\}$$

نتیجه: زیرفضای ستونی ماتریس $A_{m\times n}$ یک زیرفضای برداری در $\mathbb{R}^m$ است.

تعریف: فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$ مجموعه همه بردارهای $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ است که در معادله زیر صدق کند

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

لم: فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$ یک زیرفضای برداری در $\mathbb{R}^n$ است.

اثبات: فرض کنید $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in N(A)$. به عبارت دیگر

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

روشن است

$$A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

از طرفی دیگر برای هر $c \in \mathbb{R}$ داریم

$$A\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

پس فضای پوچ دو شرط زیرفضای برداری را برآورده می‌کند. □

۱.۳ استقلال خطی

تعریف: بردارهای $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ مستقل خطی هستند اگر $\alpha_1\boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$ تنها در صورتی درست باشد که

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$$

به عبارت دیگر، اگر $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ ستونهای ماتریس A باشند، فضای پوچ A تنها شامل بردار صفر باشد.

$$\begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{v_1} & \ldots & \boldsymbol{v_n} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

در غیر اینصورت بردارهای مذکور وابسته خطی خواهند بود.
لم: اگر $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ وابسته خطی باشند آنگاه حتما یکی از بردارها را می‌توان با ترکیب خطی بردارهای دیگر نوشت.

اثبات: بنا به فرض لم باید ضرایب غیر صفر $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ وجود داشته باشند که

$$\alpha_1\boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

بدون کاهش عمومیت مسئله فرض کنید $\alpha_1 \neq 0$. پس

$$\alpha_1\boldsymbol{v_1} = -\alpha_2\boldsymbol{v_2} + \ldots + -\alpha_n\boldsymbol{v_n}$$

درنتیجه

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{v_2} + \ldots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1}\boldsymbol{v_n}$$

$\square$

چند مثال: بردارهای زیر در فضای $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی هستند.

$$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

بردارهای زیر نیز در فضای $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی هستند.

$$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

بردارهای زیر وابسته خطی هستند چون بردار سوم را می‌توان از ترکیب خطی دو بردار اول بدست آورد.

$$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \}$$

نتیجه: اگر ستونهای ماتریس A مستقل خطی باشند آنگاه دستگاه زیر در صورت داشتن جواب، جواب یکتا دارد. (چرا؟)

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

۴ محاسبه فضای پوچ

فضای پوچ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ چیست؟

جواب: همه بردارهای $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ که در معادله زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بدست می‌آید: $u = 0, v = 0$. پس فضای پوچ تنها شامل بردار صفر است. اما اگر برداری دیگر مثل $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$ را به جمع ستونها اضافه کنیم (دقت کنید ستون جدید حاصلجمع دو ستون قبلی است) آنگاه فضای پوچ افزایش می‌یابد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این حالت فضای پوچ، غیر از بردار صفر، شامل بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ هم می‌باشد. این یعنی اینکه یک ترکیب خطی (غیر بدیهی) از ستونها صفر شده است.

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این بخاطر وابستگی بین ستونهای ماتریس A است/ در حالت قبلی که فضای پوچ تنها شامل بردار صفر بود ستونهای ماتریس به هم وابسته نبودند (ستونها ضریبی از هم نبودند) اما در حالت بعدی یکی از ستونها حاصلجمع دیگر دو ستون است.

۱.۴ کاربرد حذف گاوسی در محاسبه فضای پوچ

هدف ما پیدا کردن جوابهای این دستگاه است.

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

می‌دانیم که عملیات سطری که در روش حذف گاوسی بکار بردیم تغییری در جواب دستگاه معادلات ایجاد نمی‌کند. دلیلی ندارد نتوانیم همین اعمال را برای ماتریس غیرمربعی بکار ببریم. در روش حذف گاوسی هنگامی که درایه محوری صفر می‌شد و با جابجایی سطری نمی‌توانستیم مشکل را رفع کنیم (به اصطلاح به بن بست می‌رسیدیم) کار را متوقف می‌کردیم اما اینجا کار را ادامه می‌دهیم و سعی می‌کنیم در ستون بعدی یک درایه محوری پیدا کنیم. با یک مثال روش کار مشخص می‌شود.

توجه: چون بردار سمت راست دستگاه صفر است، از نوشتن آن صرف نظر می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

درایه a_{11} به عنوان اولین درایه محوری انتخاب می‌کنیم و سعی می‌کنیم با عملیات سطری درایه‌های زیر آن را صفر کنیم. ماتریس زیر حاصل می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

متاسفانه درایه a_{22} صفر است و نمی‌توان با جابجایی سطری آن را غیرصفر کرد. پس درایه a_{23} را به عنوان درایه محوری بعدی انتخاب می‌کنیم و با عملیات سطری درایه زیر آن را صفر می‌کنیم. بدست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

درایه a_{34} هم صفر است و دیگر کاری نمی‌توان کرد. پس ما در اینجا فقط دو درایه محوری پیدا کردیم.
ستونهایی که درایه محوری دارند را **ستون محوری** و ستونهای دیگر را **ستون آزاد** می‌نامیم.
به ماتریس حاصل یک **ماتریس پلکانی** می‌گویند.

دو نکته اساسی:

- ستونهای محوری مستقل خطی هستند (چرا؟)
- هر ستون آزاد را می‌توان با ترکیب خطی ستونهای محوری بدست آورد. (چرا؟)

یک بردار در فضای پوچ ماتریس A ضرایب ترکیب خطی معادله زیر است.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

متغیرهای متناظر با ستونهای محوری را **متغیرهای محوری** و دیگر متغیرها را **متغیرهای آزاد** می‌نامیم. در این مثال x_1 و x_3 متغیرهای محوری و x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند.

یک نکته اساسی دیگر:

- هر مقدار دلخواهی که به متغیرهای آزاد بدهیم، متغیرهای محوری بصورت منحصر بفرد بدست می‌آیند. (چرا؟)

برای بدست آوردن جواب دستگاه، متغیرهای محوری را برحسب متغیرهای آزاد بدست می‌آوریم. دقت کنید در حالتی که ماتریس متغیر آزاد نداشته باشد (ستونها همه مستقل خطی باشند) متغیرهای محوری بصورت منحصر بفرد بدست می‌آیند که البته همان بردار صفر است.

در مثال مورد بحث، دستگاه معادلات بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

از معادلات بالا بدست می‌آید.

$$x_3 = -2x_4$$

$$x_1 = -2x_2 + 2x_4$$

جواب دستگاه را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

همانطور که می‌بینید جواب بصورت ترکیب خطی دو بردار نوشته شده است. به این دو جواب **جوابهای خاص** دستگاه می‌گوییم. جوابهای خاص لزوما مستقل خطی هستند (چرا؟). از این نتیجه می‌شود که فضای پوچ ماتریس مورد بحث یک زیرفضای دو بعدی است. همچنین **بعد** فضای ستونی ماتریس A برابر با تعداد ستونهای محوری است (در دروس بعدی به مفهوم بعد زیرفضا پرداخته می‌شود.)

رتبه ماتریس $=$ تعداد ستونهای محوری $=$ بعد فضای ستونی

تعداد ستونهای آزاد $=$ بعد فضای پوچ

مراحل بدست آوردن فضای پوچ:

- ماتریس A را با استفاده از عملیات سطری بصورت پلکانی در می‌آوریم.
- ستونهای محوری و ستونهای آزاد را مشخص می‌کنیم.
- متغیرهای محوری متناظر با ستونهای محوری و متغیرهای آزاد متناظر با ستونهای آزاد هستند.
- جوابهای خاص دستگاه را بدست می‌آوریم. دقت کنید تعداد جوابهای خاص برابر با تعداد متغیرهای آزاد است. برای بدست آوردن هر جواب خاص، متغیر آزاد مربوطه را 1 و بقیه متغیرهای آزاد را 0 قرار می‌دهیم. بعد از جایگذاری متغیرهای محوری را بدست می‌آوریم.
- جواب دستگاه بصورت ترکیب خطی از جوابهای خاص نوشته می‌شود.

- $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

فضای پوچ این ماتریس مجموعه همه بردارهایی در فضای $\mathbb{R}^4$ است که در معادله زیر صدق می‌کند.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر جواب دستگاه زیر

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\end{cases}$$

پیرو روشی که در درس قبل برای محاسبه فضای پوچ ارائه کردیم، ابتدا با استفاده از عملیات سطری درایه‌های محوری را پیدا می‌کنیم. ماتریس A تنها یک سطر دارد پس تنها یک درایه محوری می‌تواند وجود داشته باشد. اولین درایه ماتریس غیر صفر است. پس آن را به عنوان درایه محوری انتخاب می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

درنتیجه ستون اول، تنها ستون محوری است و سه ستون دیگر ستونهای آزاد هستند. به همین ترتیب متغیر x_1 تنها متغیر محوری و متغیرهای دیگر آزاد هستند. x_1 را برحسب متغیرهای آزاد بدست می‌آوریم.

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

حال جوابهای خاص دستگاه را بدست می‌آوریم. این دستگاه سه متغیر آزاد دارد پس سه جواب خاص را باید محاسبه کنیم. برای هر جواب خاص، مقدار یکی از متغیرهای آزاد را 1 و بقیه را صفر قرار می‌دهیم. سپس مقدار متغیر محوری بصورت منحصربفرد بدست می‌آید.

$$x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$$

بدست می‌آید.

$$x_1 = -2$$

پس $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ یک جواب خاص دستگاه است. به همین ترتیب برای

$$x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$$

جواب $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ بدست می‌آید. در نهایت برای

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$$

جواب $\begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ بدست می‌آید. حال فضای پوچ ماتریس A بصورت ترکیب خطی زیر بیان می‌شود.

$$x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

بطوریکه بجای x_2 و x_3 و x_4 هر مقدار دلخواهی می‌تواند بنشیند.

اگر دقت کنید سه جواب خاص بالا، مستقل خطی هستند (چون هیچکدام را نمی‌توان با استفاده از جمع ضرایبی از دو دیگر بردار نوشت). برای مثال هیچ α و β وجود ندارد که در رابطه زیر صدق کند.

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

علاوه بر این توانسته‌ایم فضای پوچ ماتریس A را (که البته یک زیرفضای برداری است) بصورت ترکیب خطی سه بردار بنویسیم. این سه بردار در واقع تشکیل یک **پایه** را برای فضای پوچ A می‌دهند.

قبل از اینکه مفهوم پایه بطور رسمی تعریف کنیم. یک مثال دیگر را بررسی می‌کنیم.

- $$A=\begin{bmatrix}2&0&4&2\\1&3&-4&3\\2&6&4&-1\end{bmatrix}$$

برای محاسبه فضای پوچ ماتریس A ابتدا درایه‌های محوری را پیدا می‌کنیم. درایه یکم ستون اول را به عنوان اولین درایه محوری انتخاب می‌کنیم و با عملیات سطری دو درایه زیر آن را صفر می‌کنیم. بدست می‌آید.

$$A=\begin{bmatrix}2&0&4&2\\0&3&-6&2\\0&6&0&-3\end{bmatrix}$$

داریه دوم ستون دوم غیرصفر است. پس به عنوان دومین درایه محوری انتخاب می‌شود. حال سعی می‌کنیم درایه زیر آن را صفر کنیم. پس از عملیات سطری ماتریس زیر بدست می‌آید.

$$A=\begin{bmatrix}2&0&4&2\\0&3&-6&2\\0&0&12&-7\end{bmatrix}$$

درایه سوم ستون سوم، به عنوان سومین درایه محوری انتخاب می‌شود. درایه محوری دیگری قابل انتخاب نیست. سه ستون اول ستونهای محوری و ستون آخر ستون آزاد است. در نتیجه متغیرهای x_1 و x_2 و x_3

محوری و x_4 تنها متغیر آزاد است. بدین ترتیب می‌توان x_1 و x_2 و x_3 را برحسب x_4 بدست آورد. دستگاه زیر حاصل عملیات سطری بالا است.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 12x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

حال باید جوابهای خاص را بدست آوریم. تنها یک متغیر آزاد داریم پس تنها یک جواب خاص وجود دارد. قرار می‌دهیم $x_4 = 1$ و جواب خاص زیر از روی دستگاه معادلات بالا بدست می‌آید.

$$x_4 = 1, x_3 = \frac{7}{12}, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{-13}{6}$$

در نتیجه فضای پوچ ماتریس A بصورت زیر بیان می‌شود.

$$x_4 \begin{bmatrix} \frac{-13}{6} \\ \\ \frac{1}{2} \\ \\ \frac{7}{12} \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

درحالیکه x_4 می‌تواند هر مقداری بگیرد. پس فضای پوچ A در واقع بصورت یک خط در فضای چهار بعدی است.

نکته مهم: هنگامی که تعداد ستونها بیشتر از سطرهاست (تعداد مجهولات بیشتر از معادلات است) فضای پوچ ماتریس A بیشمار عضو دارد. به عبارت دیگر دستگاه $Ax = \mathbf{0}$ بیشمار جواب دارد. این از اینجا ناشی می‌شود که تعداد ستونهای محوری نمی‌تواند از تعداد سطرهای ماتریس بیشتر باشد. در نتیجه حتما یک ستون آزاد وجود دارد و متغیر متناظر با آن به دلخواه هر مقداری می‌تواند بگیرد.